★数理計画と最適化

本日の内容

1．重要な最適化問題の説明・定式化 Part 2

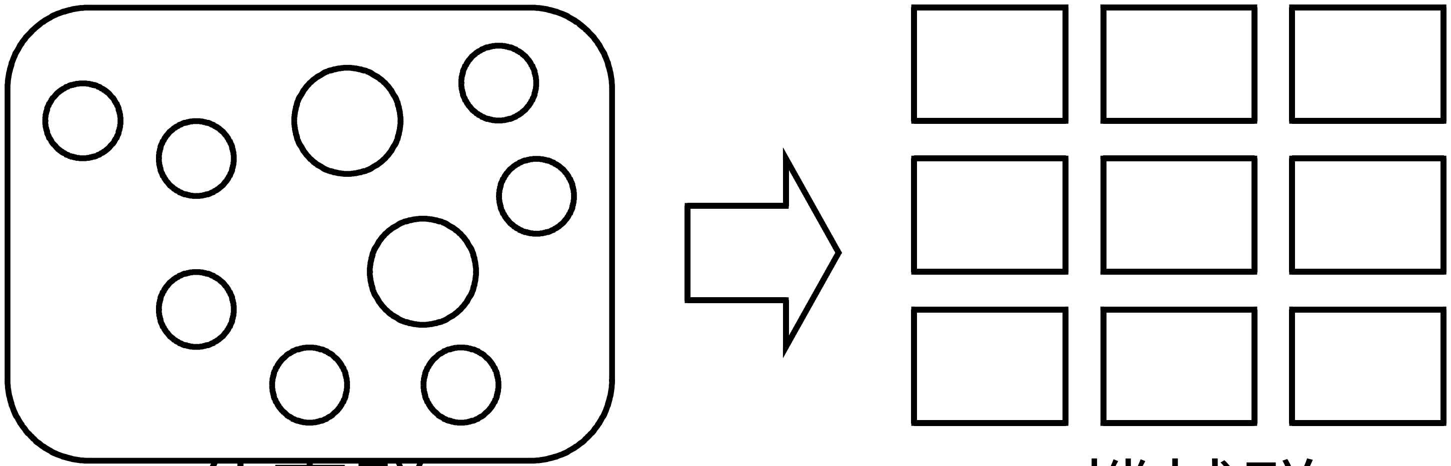
- 割当て問題
- 栄養問題
- 巡回セールスマン問題(TSP)

(既に説明したもの)
- 生産計画問題
- 輸送問題
- ナップサック問題

●割当て問題

n個の仕事をn台の機械に割り当てる問題

仕事i(i=1,2,・・・,n)を機械j(j=1,2,・・・,n)に割り当てたときのコストCij(≧0)が与えられているとする。n×n個の決定変数Xij∈{0,1}を導入し、仕事iを機械jに割り当てるときにXij=1、割り当てないときにXij=0とすると、割り当て問題は次ページのように定式化される。



仕事群　　　　　機械群

●割当て問題の定式化

$$\text{Min} \quad Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \qquad (1)$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad (j=1,2,3,\cdots,n) \qquad (3)$$

$$X_{ij} \in \{0,1\} \quad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n) \qquad (4)$$

式(4)を $X_{ij} \geqq 0$ と置き換えると線形計画問題になる

●割り当て問題（練習）（２０分）

４人の博士 A,B,C,D が、英語、数学、物理、化学の試験問題作成を分担する。４人はそれぞれ専門が違うので、次表のように問題作成に作業時間が必要である。

	英語	数学	物理	化学
A	6	1	9	3
B	2	5	7	8
C	6	3	5	4
D	3	5	2	1

(1) このとき、４人の総作業時間を最小にするには、誰がどの科目を担当すればよいか？　この問題を定式化しなさい。

(2) そのときの総作業時間はいくらか？（参考問題）

●解答

$X_{ij}=1$：博士 i が科目 j を担当する　　(i=1,2,3,4；j=1,2,3,4)

$X_{ij}=0$：博士 i が科目 j を担当しない　(i=1,2,3,4；j=1,2,3,4)

とする。16 個の決定変数になるので、これらの関係を表現すればよい。

まず、博士 i は1つの科目のみ担当するため、

$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=1$

$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=1$

$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}=1$

$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}=1$

を満たさねばならない。これらをまとめると $\sum_{j=1}^{4} X_{ij} = 1 \quad (i=1,2,3,4)$

逆に科目 j からみると、科目 j は博士 i が担当するので、

$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}=1$

$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}=1$

$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}=1$

$X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}=1$　　すなわち　$\sum_{i=1}^{4} X_{ij} = 1 \quad (j=1,2,3,4)$

目的関数 Z は作業時間の総和なので、

$$
\begin{aligned}
Z = {} & 6X_{11}+1X_{12}+9X_{13}+3X_{14}+\\
& 2X_{21}+5X_{22}+7X_{23}+8X_{24}+\\
& 6X_{31}+3X_{32}+5X_{33}+4X_{34}+\\
& 3X_{41}+5X_{42}+2X_{43}+1X_{44}
\end{aligned}
$$

となる。以上をまとめると、

Min $Z = 6X_{11}+1X_{12}+9X_{13}+3X_{14}+2X_{21}+5X_{22}+7X_{23}+8X_{24}+6X_{31}+3X_{32}+5X_{33}+4X_{34}+3X_{41}+5X_{42}+2X_{43}+1X_{44}$

Sub.to

$$\sum_{j=1}^{4} X_{ij} = 1 \quad (i=1,2,3,4)$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_{ij} = 1 \quad (j=1,2,3,4)$$

$$X_{ij} \in \{0,1\} \quad (i=1,2,\cdots,4;\ j=1,2,\cdots,4)$$

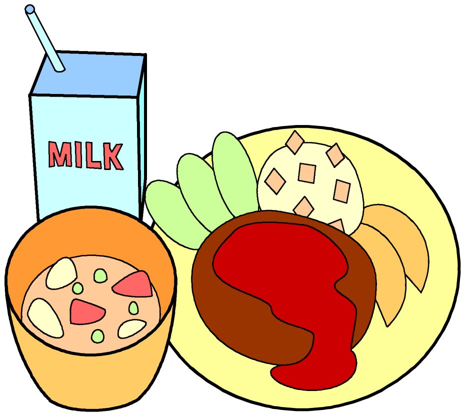
また、このときの解Xは

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この解はA：数学、B：英語、C：物理、D：化学を担当することを意味する。

●栄養問題

食事を作るために n 種類の食品 F1,F2,・・・,Fn を購入する。1日に必要な最低限の栄養素 N1,N2,・・・,Nm を摂取し、かつ費用を最小にしたい。
食品 Fj の1グラムに含まれている栄養素 Ni の量は aij ミリグラムであり、1日に必要な栄養素 Ni の最低量は bi ミリグラムである。また、食品 Fj の1グラムあたりの価格は Cj 円である。このとき、j=1,・・・,n に対して食品 Fj の購入量を Xj グラムとおいて、必要な栄養素量を満たしつつ費用を最小にするための購入量 Xj を求めよ。



vitamin A
vitamin B
vitamin C
vitamin D
vitamin E
Kalium
Calcium

●栄養問題の定式化

$$\text{Min} \quad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots\cdots + C_nX_n$$

Subject to

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \geqq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \geqq b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \geqq b_m$$

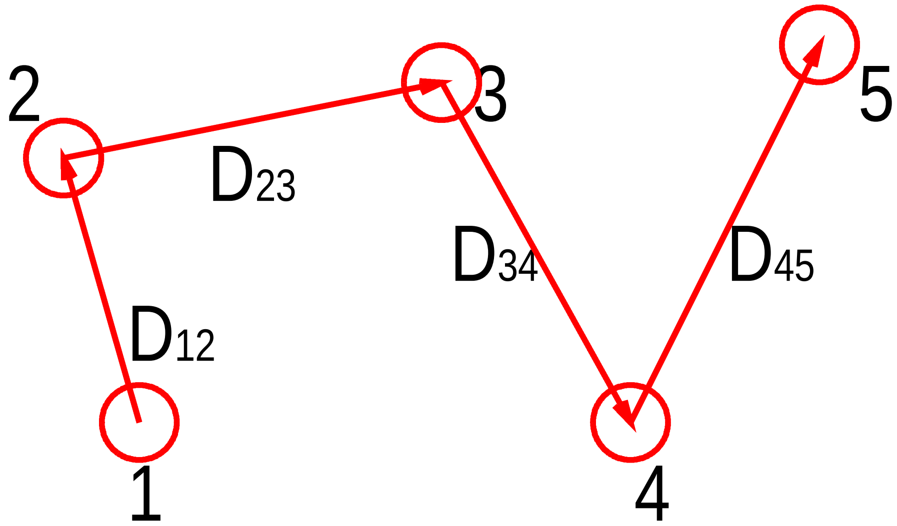
$$X_j \geqq 0 \quad j = 1,2,\cdots\cdots,n$$

●巡回セールスマン問題(Traveling Salesman Problem)

N個の都市があるとき，これらの都市を1度ずつ訪問していくとすると，最短距離（最短時間）で巡回するためにはどういう順番で巡回すればよいか？

＜TSP の定式化＞

都市 C_i と都市 C_j の距離 D_{ij} $(i,j=1,2,3,\cdots,n;\ i \neq j)$ が与えられているとする。
決定変数として $X_{ij} \in \{0,1\}$ を導入し、都市 C_i の直後に都市 C_j を訪問するときに $X_{ij}=1$, そうでないときに $X_{ij}=0$ とする。



●巡回セールスマン問題の定式化

$$\min \quad Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}X_{ij} \qquad (1)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad (j=1,2,3,\cdots,n) \qquad (3)$$

$\{X_{ij}=1\}$で決まる巡回路が複数の閉路を含まない　(4)

$$X_{ij} \in \{0,1\} \quad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n) \qquad (5)$$

●巡回セールスマン問題（TSP の数値例）

都市数が５のとき，考えられる巡回路の総数は１２通り．

都市数が１０のとき，巡回路総数は 181440 通り

都市数が１５のとき，巡回路総数は 43589145600 通り

都市数が２０のとき，総数は 60822550204416000 通り

・・・・・・・・・・＞ 約６京通り

TSP ＝最も難しい最適化問題のひとつ．

●最適化問題の解法について

連続変数を対象とする最適化（Linear Programming）

生産計画問題
輸送問題
栄養問題

$X_{ij} \geqq 0$：*非負条件*

対処方法

列挙法　（シンプレクス法，双対シンプレクス法）

整数変数を対象とする最適化（組合せ最適化）

ナップサック問題
割当て問題
巡回セールスマン問題

$X_{ij} \in \{0,1\}$

対処方法

列挙法　（分枝限定法，整数計画法，総当たり法）
発見的方法（Greedy Method, Stingy Method）
探索法　（局所探索法，遺伝的アルゴリズム）

★練習課題（2週間後の講義終了までにレポート提出）

荷物 i	1	2	3	4	5	6	7	8	B
重量 Ai	3	6	5	4	8	5	3	4	25
価格 Ci	7	12	9	7	13	8	4	5	

1） 上記のナップサック問題を解くための総当り法
　のプログラムを作りなさい。言語は何でも良い。

2） 上記のナップサック問題を定式化し、
　その連立方程式を解くプログラムを作りなさい。
　連立方程式の解法は何でも良い。

上記２課題の考え方と実行結果を比較検討し、レポートにまとめて
pdf で nagayama@ie.u-ryukyu.ac.jp へ送信すること。