確率及び統計／レポート４

学籍番号：　０９５７０７Ｂ
氏名：　大 城 佳 明
提出日：　2010 年 6 月 8 日

1　問題

確率変数 X_1, X_2, X_3 は互いに独立な正規分布に従い、期待値と分散は次の通りである。

$$X_1 \sim N(1,4) \qquad X_2 \sim N(2,3) \qquad X_3 \sim N(3,3)$$

確率変数 Y は、次式で表される

$$Y = X_1 + 4X_2 - 2X_3$$

(1) P ($X_1 >$ − 1.4) を求めよ。
(2) 確率変数 Z が正規分布 N (?, σ²) に従うとき、
　確率変数 aZ ($a \neq 0$) がどんな分布に従うか特性関数を用いて求めよ。
(3) (2) の確率変数 aZ について、期待値と分散を求めよ。
(4) 確率変数 Y の分布と期待値、分散を求めよ。

2　解答

2.1　P ($X_1 >$ − 1.4) を求めよ。

$X_1 \sim N(1,4)$ を標準正規分布にする。

$$A = \frac{2}{-1.4-1} = -1.2$$

よって

$$X > -1.4 \qquad \rightarrow \qquad A > -1.2$$

になるので、したがって P209 の表より、

$$\begin{aligned} P(A > -1.2) &= 1 - 0.1151 \\ &= 0.8849 \end{aligned}$$

2.2　確率変数 Z が正規分布 N $(?, \sigma^2)$ に従うとき、確率変数 aZ $(a \neq 0)$ がどんな分布に従うか特性関数を用いて求めよ。

(2) 確率変数 Z の特性関数は

$$\begin{aligned} \Phi\ (\xi) &= E[e^{i\xi Z}] \\ &= exp[i\xi\mu_1 + (i\xi)^2\frac{\sigma^2}{2}] \end{aligned} \tag{1}$$

である。
確率変数 Za の特性関数を求める

$$\Phi\ (\xi) = E[e^{i\xi Za}]$$

キュムラート展開をすると、

$$\begin{aligned} &= exp[i\xi\langle Za\rangle_c + \frac{1}{2}(i\xi)^2\langle Z^2a^2\rangle_c + \frac{1}{3!}(i\xi)^3\langle Z^3a^3\rangle_c + \quad\cdots\quad] \\ &= exp[i\xi a\langle Z\rangle_c + \frac{1}{2}(i\xi)^2a^2\langle Z^2\rangle_c + \frac{1}{3!}(i\xi)^3a^3\langle Z^3\rangle_c + \quad\cdots\quad] \end{aligned}$$

$\langle Z^n\rangle = 0(3 \leqq n)$ より

$$\Phi\ (\xi) = exp[i\xi a\langle Z\rangle_c + \frac{1}{2}(i\xi)^2a^2\langle Z^2\rangle_c] \tag{2}$$

$a\langle Z\rangle$ と a^2 $\langle Z^2\rangle$ は定数より、(1) と (2) を比べると (2) は正規分布であることがわかる。
したがって、Za は正規分布である。

2.3　(3) (2) の確率変数 aZ について、期待値と分散を求めよ。

１次キュムラントが期待値、２次キュムラントが分散であるから
(2) より

$$\begin{aligned} a\langle Z\rangle_c &= a\langle Z\rangle = a\mu \\ a^2\langle Z^2\rangle_c &= a^2(\langle Z^2\rangle - \langle Z\rangle^2) \\ &= a^2(\mu^2 + \sigma^2 - \mu^2) \\ &= a^2\sigma^2 \end{aligned}$$

したがって、期待値 $a\mu$、分散 $a^2\sigma^2$ である

2.4　(4) 確率変数 Y の分布と期待値、分散を求めよ。

X_1、$4X_2$、$-2X_3$はそれぞれ独立な正規分布に従う。よって、再生成により Y も正規分布に従う。
期待値と分散はそれぞれの確率変数の期待値の和、分散の和に等しい。
期待値 μ は

$$\begin{aligned}\mu &= E[Y] = E[X_1] + E[4X_2] - E[2X_3] \\ &= 1 + 4 \times 2 - 2 \times 3 \\ &= 3\end{aligned}$$

分散 σ^2 は

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[Y^2] - E[Y]^2 \\ &= 4 + 16 \times 3 + 4 \times 3 \\ &= 64\end{aligned}$$

したがって、Y〜N(3,64)　である