確率及び統計／レポート5

学籍番号： ０９５７０７Ｂ
氏名： 大 城 佳 明
提出日： 2010 年 7 月 13 日

1 問題

ある N 人の集団に対して、表の出る確率が $p(0 < p < 1)$ である同質のコインを全員に配布した。
各メンバーはそのコインを使ってコイントスを m 回繰り返し、表の出た回数を記録した。
次にメンバーから無作為に $n(0 < n < N)$ 人選出し、各人が記録した回数の平均値を考える。

(1) この平均値が従う確率分布を求めよ。

(2) 期待値と分散を求めよ。

2 解答

2.1 (1) この平均値が従う確率分布を求めよ。

標準平均値なので $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$ を求めれば良い

$$X =_m C_x p^x (1-p)^{m-x}$$

より二項分布である
X の特性関数は

$$\begin{aligned}\Phi\ (\xi) = \langle e^{i\xi X} \rangle &= \sum_{i=0}^{n} e^{i\xi x} X \\ &= \sum_{i=0}^{n} e^{i\xi x} mC_x P^x (1-p)^{m-x} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (Pe^{(i\xi)x})(1-p)^{m-x} \\ &= (pe^{i\xi} + 1 - p)^m \qquad (1)\end{aligned}$$

である。まず、最初に $\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$ を求める。$Z =$ 二項分布 $(A)+$ 二項分布 (B) とすると

$$\Phi\ (\xi) = E[e^{i\xi Z}] = E[e^{i\xi A} \cdot e^{i\xi B}]$$

より、A と B は二項分布の確率関数なので、

$$\begin{aligned}\Phi\ (\xi) &= (pe^{i\xi}+1-p)^m\cdot(pe^{i\xi}+1-p)^m \\ &= (pe^{i\xi}+1-p)^{2m}\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{i=1}^{n} X^{(i)} = (pe^{i\xi}+1-p)^{mn} \tag{2}$$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X$ の特性関数は

$$\begin{aligned}\Phi\ (\xi) &= E[e^{i\xi\frac{X}{n}}] \\ &= (pe^{\frac{i\xi}{n}}+1-p)^n \end{aligned} \tag{3}$$

したがって (2),(3) より、$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$ は

$$\Phi\ (\xi) = (pe^{\frac{i\xi}{n}}+1-p)^{mn} \tag{4}$$

ちなみに、この平均値が従う確率分布は二項分布ではない。

2.2 (2) 期待値と分散を求めよ。

(4) の特性関数より、

$$\begin{aligned}\Phi\ (\xi) &= (pe^{\frac{i\xi}{n}}+1-p)^{mn} \\ \frac{\partial}{\partial(i\xi)}\Phi\ (\xi) &= mn(pe^{\frac{i\xi}{n}}+1-p)^{mn-1}\cdot\frac{1}{n}pe^{\frac{i\xi}{n}} \\ &= m(pe^{\frac{i\xi}{n}}+1-p)^{mn-1}\cdot pe^{\frac{i\xi}{n}} \end{aligned} \tag{5}$$

したがって、期待値は

$$\begin{aligned}E[X] &= \left.\frac{\partial}{\partial(i\xi)}\Phi\ (\xi)\right|_{\xi=0} \\ &= m(p+1-p)^{mn-1}\cdot \\ &= mp \end{aligned} \tag{6}$$

(4) の特性関数の 2 回微分は

$$\frac{\partial^2}{\partial^2(i\xi)}\Phi\ (\xi) = m(mn-1)(pe^{\frac{i\xi}{n}}+1-p)^{mn-2}\cdot\frac{1}{n}(pe^{\frac{i\xi}{n}})^2+m(pe^{\frac{i\xi}{n}}+1-p)^{mn-1}\cdot\frac{1}{n}pe^{\frac{i\xi}{n}}$$

である。したがって分散の値は

$$\begin{aligned}V[X] &= \left.\frac{\partial^2}{\partial^2(i\xi)}\Phi\ (\xi)\right|_{\xi=0} - E[X]^2 \\ &= m(mn-1)\cdot\frac{p^2}{n}+m\cdot\frac{p}{n}-m^2p^2 \\ &= \frac{m^2np^2-mp^2+mp-m^2np^2}{n} \\ &= \frac{mp(1-p)}{n} \end{aligned} \tag{7}$$