確率及び統計／レポート6

学籍番号：　０９５７０７Ｂ
氏名：　大 城 佳 明
提出日：　2010 年 7 月 15 日

1　問題

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う母集合から次の大きさ 10 の標本を得た。
1.7　2.4　2.7　1.8　3.0　4.1　1.8　3.2　1.6　2.3
(1) 母数 μ, σ^2 をそれぞれ最尤推定せよ
(2) 母数 μ, σ^2 を信頼水準 0.95 でそれぞれ区間推定せよ
(3) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 2$ を有意水準 0.05 で両側検定せよ
(4) 帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 1$ を有意水準 0.1 で両側検定せよ

2　解答

2.1　(1) 母数 μ, σ^2 をそれぞれ最尤推定せよ

正規分布に従うので、確率変数は

$$W(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \tag{1}$$

(1) を使って対数尤度 $l(\theta)$ を求めると

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{i=0}^{N} logW(x^{(i)}, \theta) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \{-\frac{1}{2} log(2\pi\sigma^2) - \frac{(x^{(i)}-\mu)^2}{2\ \sigma^2}\} \\ &= -\frac{N}{2} log(2\pi\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} (x^{(i)}-\mu)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

さらに (2) の式を μ で偏微分し、最大を求めるため値を「０」とする

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{(i=1)}^{N} (x^{(i)} - \mu) = 0 \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{N} \sum_{(i=1)}^{N} x^{(i)} \end{aligned} \tag{3}$$

となる。次に、(2) の式を σ で 2 回偏微分し、最大値を求めるため値を「0」とする

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{N}{2\sigma^2} + -\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{(i=1)}^{N}(x^{(i)}-\mu)^2 = 0 \\ \hat{\sigma^2} &= \frac{1}{N}\sum_{(i=1)}^{N}(x^{(i)}-\mu)^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}(x^{(i)}-\hat{\mu})^2 \end{aligned} \tag{4}$$

(3),(4) を利用して、母数 μ, σ を求める

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{1}{10}(1.7+2.4+2.7+1.8+3.0+4.1+1.8+3.2+1.6+2.3) \\ &= 2.46 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \frac{1}{10}(0.5776+0.0036+0.0576+0.4356+0.2916+2.6896+0.4356+0.5476+0.7396+0.0256) \\ &= 0.5804 \end{aligned} \tag{6}$$

2.2 (2) 母数 μ, σ^2 を信頼水準 0.95 でそれぞれ区間推定せよ

母分散が未知であるため

$$\begin{gathered}\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} = T(N-1) \\ P(t_l < T(N-1) < 5_u) = 1-\alpha \\ \overline{X} - t_u\sqrt{\frac{S^2}{N}} < \mu < \overline{X} + t_u\sqrt{\frac{S^2}{N}} \end{gathered} \tag{7}$$

を利用する。自由度 $N-1$ の t 分布である。

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}(x^{(i)}-\hat{\mu})^2 = 0.6449 \tag{8}$$

$$t_u = 2.262 \quad t\text{ 分布数表より (信頼水準 0.95 の値)} \tag{9}$$

(5),(8),(9) を (7) に代入すると

$$\begin{aligned}2.46-(2.262)\sqrt{\frac{0.6449}{10}} < \ &\mu < 2.46+(2.262)\sqrt{\frac{0.6449}{10}} \\ 1.8857 < \ &\mu < 3.0343 \end{aligned} \tag{10}$$

同様に母分散を求める。母平均が未知である

$$\begin{gathered}(N-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim x^2(N-1) \\ P(y_l < (N-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < y_u) = 1-\alpha \\ \frac{(N-1)S^2}{y_u} < \sigma^2 < \frac{(N-1)S^2}{y_l} \end{gathered} \tag{11}$$

を利用する。自由度 $N-1$ の x^2 分布である

$$y_u = 19.02 \tag{12}$$

$$y_l = 2.7 \quad x^2\text{分布数表 (信頼水準 0.95 の値)} \tag{13}$$

(8),(12),(13) を (7) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{9 \cdot 0.6449}{19.02} < \quad \sigma^2 \quad &< \frac{9 \cdot 0.6449}{2.7} \\ 0.3052 < \quad \sigma^2 \quad &< 2.1497 \end{aligned} \tag{14}$$

2.3 (3) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 2$ を有意水準 0.05 で両側検定せよ

母分散 σ^2 は未知である。よって検定統計量は、

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} \quad \sim \quad t(N-1) \tag{15}$$

を利用して求めることが出来る。(5),(8),μ=2 を (15) に代入すると

$$T = \frac{2.46 - 2}{\sqrt{\frac{0.6449}{10}}} = 1.8117 \tag{16}$$

自由度 9 の t 分布の数表から有意水準 0.05 での両側検定の棄却域は、2.262 以上または-2.262 以下となり、H_0 は棄却されない

2.4 (4) 帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 1$ を有意水準 0.1 で両側検定せよ

母平均 μ は未知である。よって検定統計量は、

$$\sum_{i=1}^{N} (\frac{X^{(i)} - \overline{X}}{\sigma})^2 = (N-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \quad \sim \quad x^2(N-1) \tag{17}$$

を利用して求めることが出来る。(8),$\sigma^2 = 1$ を (17) に代入すると

$$(N-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = 14 \cdot \frac{0.6449}{1} = 5.804 \tag{18}$$

自由度 9 の x^2分布の数表から$\alpha = 0.05$ の棄却域は 3.33 以下または 16.92 以上であるから H_0 は棄却されない