画像圧縮アルゴリスム

この章では、DCT/IDCT 変換のアルゴリスムと量子化モジュール/逆量子化モジュールの詳細について説明します。まず 1D-DCT について説明し、続けて 2D-DCT について述べます。

1. 1 次元 離散コサイン変換 (1D-DCT)

1 次元 N 点における DCP の公式は以下のようになります。

$$Z(u) = a(u)\sum_{x=0}^{N-1}\left(f(x)\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\right) \quad (1)$$

ただし u=0,1,2,...,N とし、α(u) は以下のように定義します。

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{N}} & for\ u = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} & for\ u \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

よって u=0 のとき、次式が得られます。

$$Z(u=0) = \sqrt{\frac{1}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}\left(f_{(x)}\right) \quad (3)$$

最初の DCT 係数はサンプル数列の平均値です。この値は **DC 係数**と呼ばれ、それ以外の全ての値は **AC 係数**と呼ばれます。上記の方程式は行列の乗算として扱うことができます。

$$\boldsymbol{Z = CX^t} \quad (4)$$

ここで X は入力行列とし、C は変換行列、Z は変換された DCT 係数行列とします。また、t は転置を表します。8×8 の 1D-DCT のとき、変換行列として式(5)が得られます。

$$C = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a & a & a \\ b & c & f & g & -g & -f & -c & -b \\ d & e & -e & -d & -d & -e & e & d \\ c & -g & -b & -f & f & b & g & -c \\ a & -a & -a & a & a & -a & -a & a \\ f & -b & g & c & -c & -g & b & -f \\ e & -d & d & -e & -e & d & -d & e \\ g & -f & c & -b & b & -c & f & -g \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし、

$$a = \sqrt{\frac{1}{8}}, b = \sqrt{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{16}\right), c = \sqrt{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right), d = \sqrt{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

$$e = \sqrt{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right), f = \sqrt{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{5\pi}{16}\right), g = \sqrt{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right)$$

2. 1 次元 逆離散コサイン変換 (1D-IDCT)

同様に、逆変換は以下のように定義されます。

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1}a(u)\left(Z(u)\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\right) \quad (6)$$

ただし x=0,1,2,...,N とし、α(u) は以下のように定義します。

$$\alpha(u)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{N}} & for\ u=0\\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} & for\ u\neq 0\end{cases} \quad (7)$$

上記の方程式は行列の乗算として扱うことができます。

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z^tC} \quad (8)$$

ここで X は入力行列とし、C は変換行列、Z は変換された DCT 係数行列とします。

3. 2 次元 DCT/IDCT

2D-DCT は 1D-DCT の拡張であり、以下のように定義することができます。

$$Z(u,v)=\alpha(u)\alpha(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(f_{(x,y)}\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]\right) \quad (9)$$

ただし u,v=0,1,2,...,N とし、α(u)とα(v)は式(2)によって定義されます。

逆変換は次式によって定義されます。

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}\alpha(u)\alpha(v)\left(C_{(u,v)}\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]\right) \quad (10)$$

ただし、x,y=0,1,2,...,N-1 とします。上記の 2D-DCT 計算は、以下のように分離して表すことができます。したがって、次式のように表されます。

$$Z(u,v)=\alpha(u)\alpha(v)\sum_{x=0}^{N-1}\left(\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\right)\sum_{y=0}^{N-1}\left(f_{(x,y)}\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]\right) \quad (11)$$

これは、2D-DCT 計算が 1D-DCT の水平成分の変換(行)と垂直成分の変換(列)によって達成できることを意味します。この考え方について、グラフを用いて説明したものを図 4 に示します。

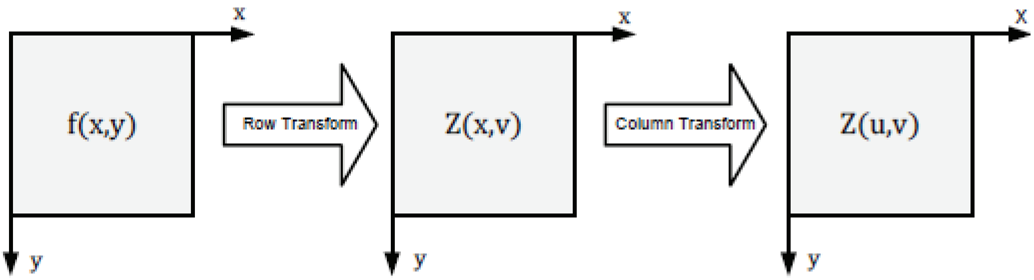

図 4 1D-DCT を用いた 2D-DCT の計算

行列演算によって、式(12)を用いることで 2D-DCT 変換は計算できます。

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^t)^t = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}^t \quad (12)$$

上記の考え方は逆 DCT でも使用でき、次式のように表せます。

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{Z}^t\boldsymbol{C})^t\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{C} \quad (13)$$

2D-DCT/IDCT 変換の 2 段階計算を行うにあたり、その過程で重要なことがあります。2 回目の 1D-DCT(または IDCT)変換を行う際には、一回目の 1D-DCT 変換の結果を用いて計算することを忘れてはいけません。

4. 量子化と逆量子化

量子化のプロセスでは、DCT 係数の全ての成分が、式(14)によって定義された 量子化テーブル Q によって除算されます。

$$Q_{DCT} = round\left(\frac{DCT(u,v)}{Q(u,v)}\right) \quad (14)$$

一般に量子化テーブル Q は左上に低い数字を持ち、右下に近づくに従って値が増えていきます。量子化テーブルの値は定められていないので、ユーザが任意に量子化テーブルを選ぶことが可能です。しかしながら JPEG 委員会が推奨している量子化テーブル Q がいくつかあるので、そのなかの $Q_{50\_Luminance}$ を $Q_{50\_Chrominance}$ を以下に示します。

$$Q_{50\_Luminance} = \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{bmatrix}$$

$$Q_{50\_Chrominance} = \begin{bmatrix} 17 & 18 & 24 & 47 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 18 & 21 & 26 & 66 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 24 & 26 & 56 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 47 & 66 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \end{bmatrix} \quad (15)$$

量子化テーブルを使用することで、実行時間に対する圧縮レベルをカスタマイズできます。ユーザがより良い圧縮率を得たいならば、より値の大きな量子化テーブルを使用しなければなりません。しかし、より良い画質を得たいならば、値の小さな量子化テーブルを使用しなければなりません。式(16)を用いて上記の基本的な量子化テーブルをスケーリングすることによって、別の量子化テーブルを得ることができます。

$$S = (Q < 50) ? \frac{5000}{Q} : 200 - 2Q \quad (16)$$

$$Q_s[i] = \left\lfloor \frac{S * Q_b[i] + 50}{100} \right\rfloor$$

例として、Q=80 における量子化テーブルをスケーリングしてみましょう。

$$Q_{80\_Luminance} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 6 & 10 & 16 & 20 & 24 \\ 5 & 5 & 6 & 8 & 10 & 23 & 24 & 22 \\ 6 & 5 & 6 & 10 & 16 & 23 & 28 & 22 \\ 6 & 7 & 9 & 12 & 20 & 35 & 32 & 25 \\ 7 & 9 & 15 & 22 & 27 & 44 & 41 & 31 \\ 10 & 14 & 22 & 26 & 32 & 42 & 45 & 37 \\ 20 & 26 & 31 & 35 & 41 & 48 & 48 & 40 \\ 29 & 37 & 38 & 39 & 45 & 40 & 41 & 40 \end{bmatrix}$$

$$Q_{80\_Chrominance} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 10 & 19 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 7 & 8 & 10 & 26 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 10 & 10 & 22 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 19 & 26 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \end{bmatrix} \quad (17)$$

伸長モジュールの入力では、式(18)で定義されるような IDCT モジュールへ入力する前に、DCT 係数を逆量子化しなければなりません。

$$IDCT(u,v) = round(Q_{DCT} * Q(u,v)) \quad (18)$$