

Project No.3 Buffon's Needle Problem

135761B 大城海斗

2016年1月8日

1 ビュフォンの針について

ビュフォンの針は、いくつかある平行線と針が交差する確率を求める問題である。この問題を利用して本レポートでは円周率の近似値を求める。

針が投下されたときに線と交わっているかどうかの判定は、針が落ちた場所 x と線に対する角度 θ で決まる。図1上の線分 AB の長さを l 、線の間隔を d ($d \geq l$) とすれば、 $x + l\sin\theta \geq d$ を満たすと、針が線と重なっていると言える。

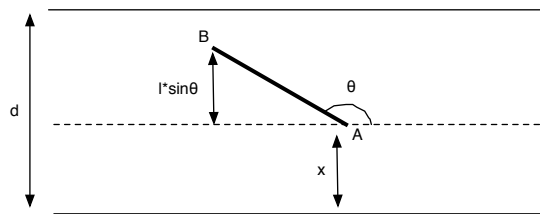


図1 針の投下

針がいかなる点 x ($0 \leq x \leq d$) に落ちててもその確率は一樣であると考えられるため、確率密度関数は $\frac{1}{d}$ となる。同様に、針が落ちた時の角度 θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ である確率密度関数は $\frac{1}{\pi}$ となる。また、 x と θ は互いに独立であるため、同時確率密度関数は2つの積で $\frac{1}{\pi d}$ と表される。先ほど述べた、針が線と重なる時の条件 $x + l\sin\theta \geq d$ より、針が線と重なる時の確率 $Pr[\text{cross}]$ はこの同時確率密度関数を用いて求めることができる。ここで、不等式 $x + l\sin\theta \geq d$ を次のように変形する。

$$\begin{aligned} x + l\sin\theta &\geq d \\ \Leftrightarrow d - l\sin\theta &\leq x \\ \Leftrightarrow d - l\sin\theta &\leq x \leq d \quad (\because 0 \leq x \leq d) \\ \Leftrightarrow -l\sin\theta &\leq x \leq 0 \end{aligned}$$

$$Pr[\text{cross}] = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{x=-l\sin\theta}^0 \frac{1}{\pi d} dx d\theta = \frac{l}{\pi d} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{l}{\pi d} [-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{2l}{\pi d}$$

この式から円周率は $\pi = \frac{2l}{d \cdot Pr[\text{cross}]}$ で近似することができる。

2 実行結果

シード値を変えて実行した結果を以下の図 2, 図 3, 図 4 に示す. 各図では, 線の間隔 d と針の長さ l を変えてシミュレーションを行った結果を 3 本のグラフでプロットしている. それぞれが真値 π に収束していき, 針の投下を 1000 回行うだけでも十分に π の近似値を求められることが分かった.

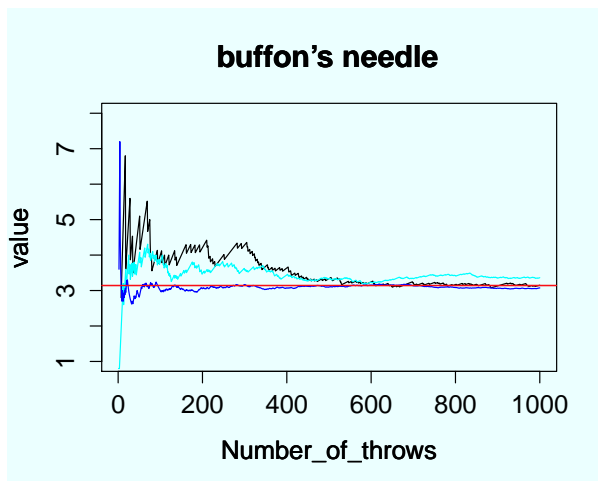


図 2 ビュフォンの針の実行結果 (1)

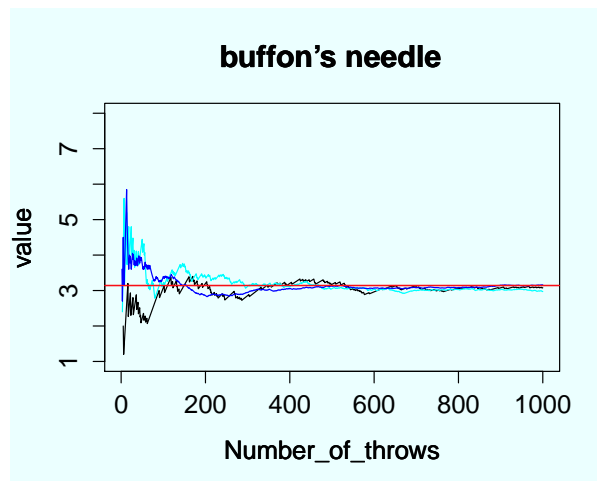


図 3 ビュフォンの針の実行結果 (2)

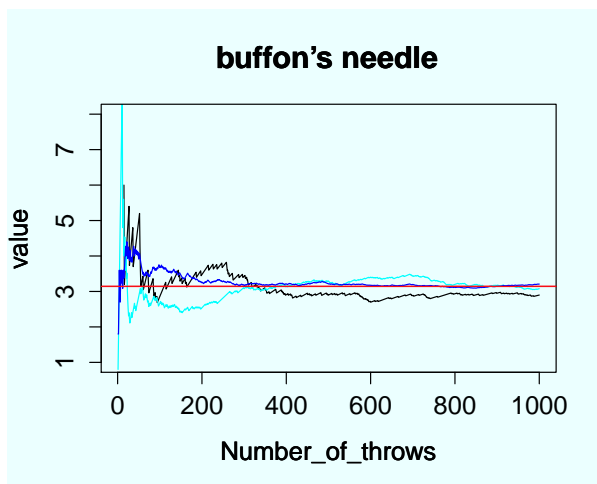


図 4 ビュフォンの針の実行結果 (3)

3 プログラム

ビュフォンの針のシミュレーション及びグラフの出力を行うプログラムは次のようになる (ソースコード 1).

ソースコード 1 ビュフオンの針のシミュレーションを行う R プログラム

```

1 set.seed(3)
2
3 ### n : the number of throws.
4 ### reduction_ratio : this must be less than 1.0.
5 ### d : the interval between lines.
6 buffons_needle <- function(n, reduction_ratio, d, axe, c) {
7   # initialize
8   l <- reduction_ratio*d # the length of needles (l <= d).
9   x <- runif(n, min = 0, max = d) # 0 <= x <= d
10  theta <- runif(n, min = 0, max = pi) # 0 <= theta <= pi
11  counter <- 0 # incremented by 1 when needle crosses line
12  value <- c() # vector for pi
13
14  # buffon throws needles.
15  for (i in 1:n) {
16    if (x[i]+l*sin(theta[i])>=d) {
17      counter <- counter + 1
18    }
19    value <- append(value, (2*i*l)/(d*counter), after=length(value))
20  }
21
22  # plot a graph.
23  Number_of_throws <- 1:n
24  plot(Number_of_throws, value, main='buffon\'s needle', type='l', axes=axe, col=c, ylim=c
25        (1.0,8.0))
26  abline(h=pi, col='red')
27 }
28 buffons_needle(1000, 0.2, 4, FALSE, 'black')
29 par(new=T)
30 buffons_needle(1000, 0.4, 9, FALSE, 'cyan')
31 par(new=T)
32 buffons_needle(1000, 0.9, 4, TRUE, 'blue')

```