Project(2) Monte Carlo Simulation

135761B 大城海斗

2016 年 1 月 17 日

モンテカルロ法を用いて以下の積分を計算する．

$$I = -\int_1^e cos[\pi \log_e x]dx \tag{1}$$

1　真の値を求める

式 (1) において，$t = \log_e x$ とおくと，$e^t = x$ となり，$dx = e^t dt$ となる．そうすると，積分の区間が表 1 のように変わる．

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

表 1　積分区間の変換

したがって，I は以下のように表され，計算すると，$I = \dfrac{(e+1)}{1+\pi^2} \approx 0.342$ となる．

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^1 e^t cos[\pi t]dt \\
&= -\left\{ \left[e^t cos(\pi t)\right]_0^1 + \pi \int_0^1 e^t sin(\pi t)dt \right\} \\
&= -\left\{ \left[e^t cos(\pi t)\right]_0^1 + \pi \left(\left[e^t sin(\pi t)\right]_0^1 - \pi \int_0^1 e^t cos(\pi t)dt \right) \right\} \\
&= -\left\{ \left[e^t cos(\pi t)\right]_0^1 + \pi \left(\left[e^t sin(\pi t)\right]_0^1 - \pi I \right) \right\} \\
&= (e+1) - \pi^2 I \quad \Longleftrightarrow \quad I = \frac{(e+1)}{1+\pi^2}
\end{aligned}$$

2　モンテカルロ法での計算

2.1　モンテカルロ法について

モンテカルロ法を用いた数値積分は，乱数を用いて N 回のシミュレーションを行い，その期待値を計算することで数値的に定積分の値を求めるものである．確率密度関数 $p(x)$ とおいて，被積分関数を $f(x)$ とおく

と，期待値は

$$E[f] = \int p(x)f(x)dx \tag{2}$$

として求められる．今回求める I において，被積分関数は $f(x) = -cos[\pi \log_e x]$ である．I には $p(x)$ は含まれていないが，連続一様分布を導入することで式 (2) と同じように確率を利用して定積分の値を求めることが可能となる．確率密度関数から得られた有限個の N 個の点を用いて，有限和で期待値を近似することができる [1].

$$\begin{aligned} I &= (e-1)\int_1^e p(x)f(x)dx \\ &\approx (e-1)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \qquad where \;\; p(x) = \frac{1}{e-1} \end{aligned}$$

2.2　実行結果

モンテカルロ法を用いて数値計算した結果は次のようになる（図 1).

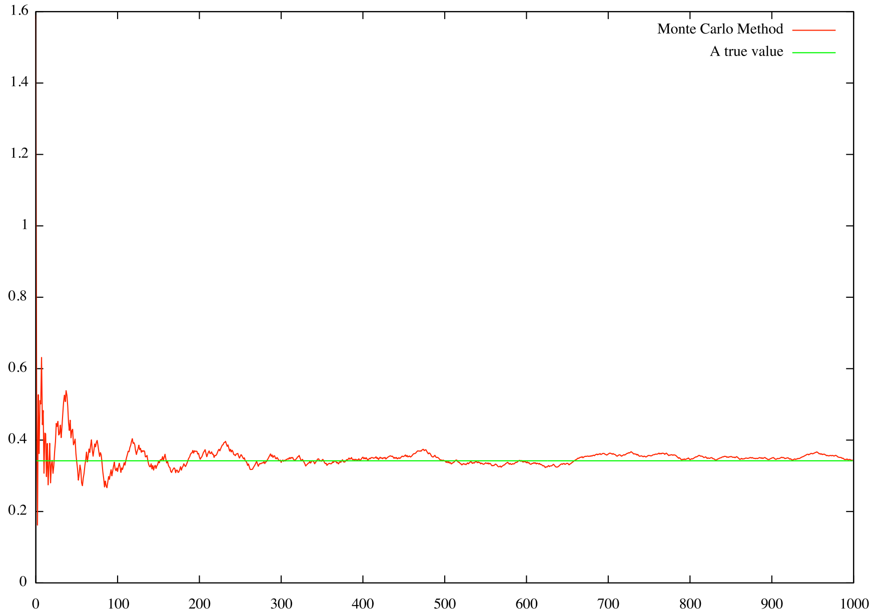

図 1　モンテカルロ法（試行回数 1000 回）

試行回数 1000 回でも十分に真の値に収束していることが分かる．このグラフから，試行回数を増やせば増やすほど近似値はよくなると予測が立てられる．

試行回数を 100000 回まで増やした時の実行結果は図 2 のようになる．試行回数が 40000 回を超えるとモンテカルロ法で求めた数値は真値とほとんど差がなくなり，横ばいになった．つまり過剰に試行回数を増やしても計算コストがかかるだけということが分かる．

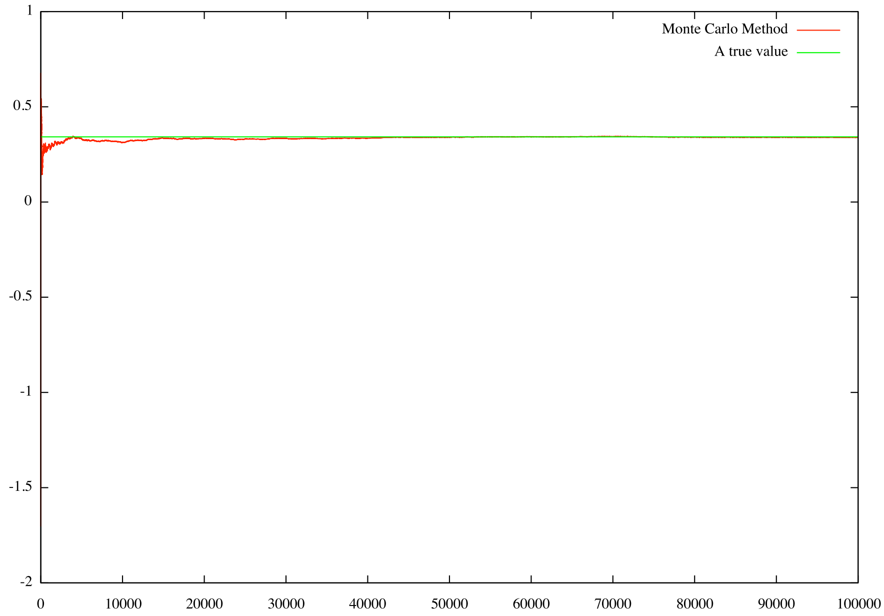

図 2　モンテカルロ法（試行回数 100000 回）

反対に試行回数を 100 回にまで減らして実行してみた結果が図 3 である．図 3 は回数を 100 回に減らしても真値にかなり近い値になっている．しかし，場合によっては，図 4 や図 5 のように真の値とは異なる結果になった．

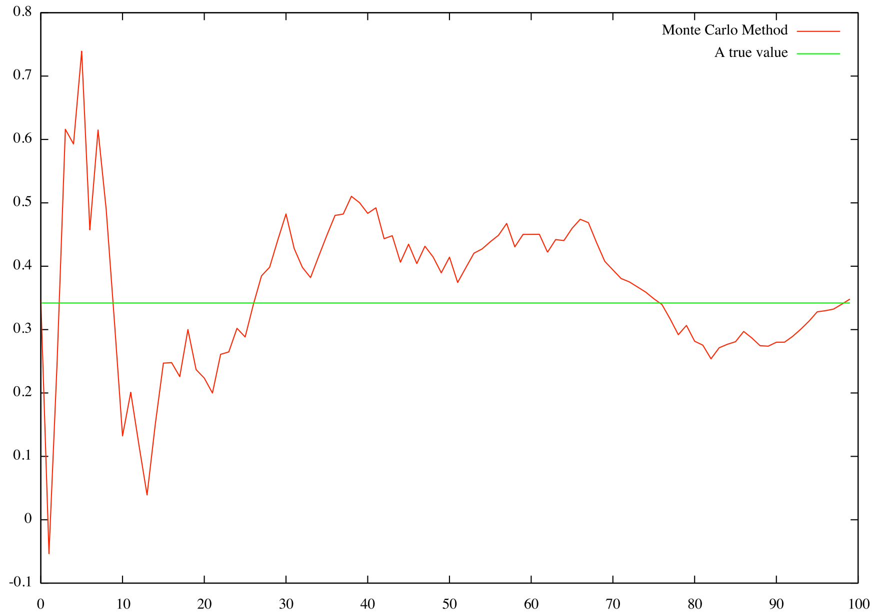

図 3　モンテカルロ法（試行回数 100 回）

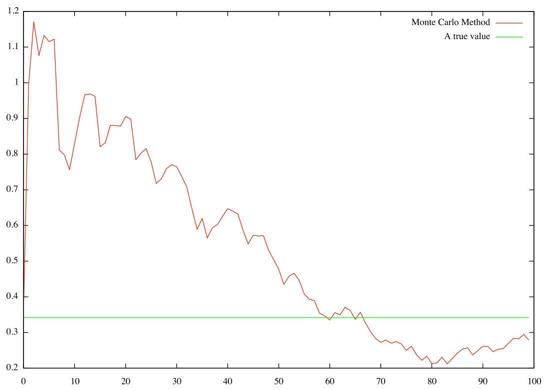

図 4　うまくいっていないモンテカルロ法の結果（試行回数 100 回）

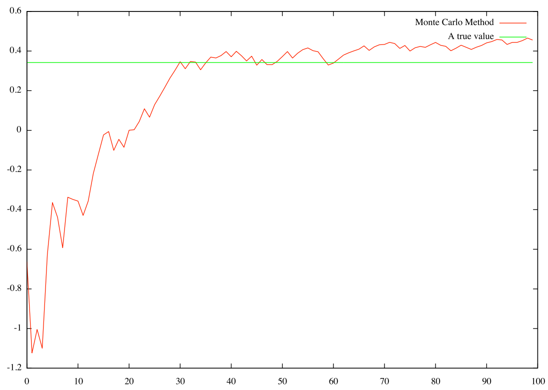

図 5　うまくいっていないモンテカルロ法の結果（試行回数 100 回）

つまり，モンテカルロ法は，ランダムに点を打つ回数が多ければ多いほど数値計算の精度が高くなる．一方で，試行回数が多すぎると十分に真値に近い値が得られているにも関わらず，無駄な計算コストがかかってしまう．適度な試行回数（今回の場合は 1000 回）でシミュレーションを行うことが大事である．

2.3　プログラム

モンテカルロ法で $-\int_1^e cos[\pi \log_e x]dx$ の近似値を求めるプログラムは次のようになる（ソースコード 1）．

ソースコード 1　モンテカルロ法を行うプログラム

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
import math
import random

# initialization
a, b = 1, math.e
N = 1000
f = lambda x:-math.cos(math.pi*math.log(x))
accumulation = 0

# monte carlo method
for i in range(1, N+1):
    x = random.uniform(a, b)
    accumulation += f(x)
    print((b-a)*accumulation/i)
```

参考文献

[1] モンテカルロ積分 - 人工知能に関する断創録
http://aidiary.hatenablog.com/entry/20140728/1406555863