シミュレーション 課題2

2014年 後期

1 課題内容

下記の積分をモンテカルロ法で計算する。

$$I = \int_1^e \sin\left[\pi \log(x)\right]\ dx = \int_1^e g(x_i)\ dx$$

2 解答及び解説

まず、この積分を普通に解いて実数値を算出する。

$$\int \sin\left[\pi \log(x)\right]\ dx$$

$t = \log(x)$ と置く。ゆえに $x = e^t$ となる。また、$\dfrac{dx}{dt} = e^t \quad dx = e^t dt$ となる。

よって、$\displaystyle\int e^t \sin(\pi t) dt$ となる。この式を F と置く。$\displaystyle F = \int e^t \sin(\pi t) dt$

$$F = \left[e^t \sin(\pi t)\right] - \pi \int e^t \cos(\pi t)\ dt = \left[e^t \sin(\pi t)\right] - \pi \left(\left[e^t \cos(\pi t)\right] + \pi \int e^t \sin(\pi t)\ dt\right)$$

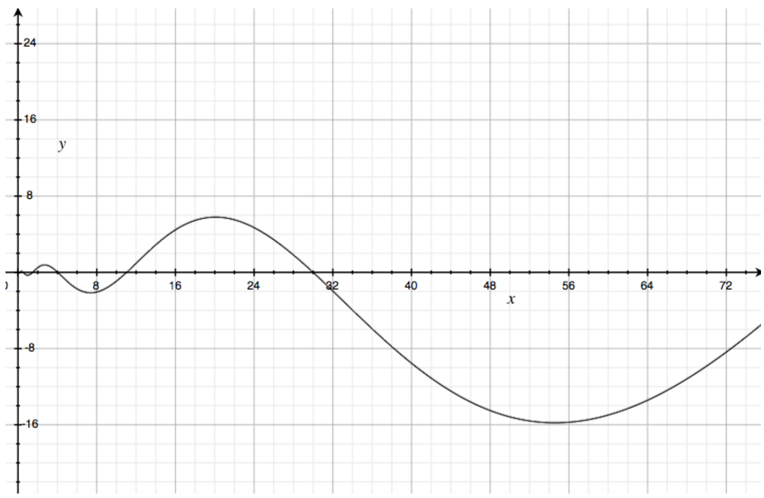
$$F = e^t \sin(\pi t) - \pi e^t \cos(\pi t) - \pi^2 F \quad (1+\pi^2)F = e^t\left(\sin(\pi t) - \pi \cos(\pi t)\right)$$

よって、$F = \dfrac{e^t\left(\sin(\pi t) - \pi \cos(\pi t)\right)}{\pi^2+1}$ となる。

$t = \log x$ を元に戻して、$\dfrac{x\left(\sin(\pi \log x) - \pi \cos(\pi \log x)\right)}{\pi^2+1}$ となる。

ゆえに、$I = \left[\dfrac{x\left(\sin(\pi \log x) - \pi \cos(\pi \log x)\right)}{\pi^2+1}\right]_1^e = 0.7857 - (-0.289) = 1.0747$ となる。(e=2.72 で計算)

このとき、$\dfrac{x\left(\sin(\pi \log x) - \pi \cos(\pi \log x)\right)}{\pi^2+1}$ のグラフは下記のようになる。



2.1 ソースコードとその解説

下記にモンテカルロ法での数値積分のソースコードを示す。

```
monte.py
 1#!/usr/bin/env python3
 2# -*- coding: utf-8 -*-
 3’’’
 4 モンテカルロ法での数値積分
 5’’’
 6import sys
 7import random
 8import math as m
 9
10
11def main():
12    NUM = 1000
13    count = 0
14    i=0
15    while(i<NUM):
16        x=random.uniform(1,2.72)
17        y=random.uniform(0,1)
18        if y < f(x):
19            count+=1
20        i+=1
21    r = (2.72-1)*(1-0)
22    print r*float(count)/NUM
23
24def f(x):
25    return m.sin(m.pi*m.log(x))
26
27if __name__ == "__main__":
28    main()
```

ソースコードの解説

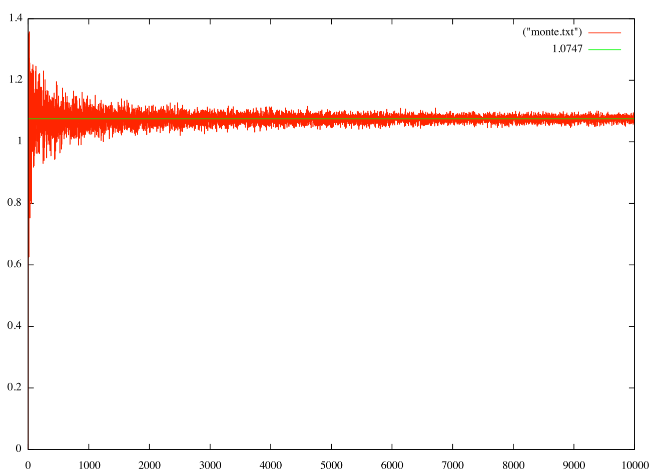
まず、main() 関数が呼び出される。12 行目の NUM は、点の数である。15 行目からがモンテカルロ法を行っている。16 行目で x の範囲を指定して乱数を発生させている。今回は、1 から e(2.72 で計算) を扱う。17 行目は y の範囲を指定して乱数を発生させている。今回の関数は sin なので、y の上限は 1 だとわかる。よって、0 から 1 の範囲を指定する。18 行目の if 文で、24 行目の関数 f() が呼び出される。ここで、求めたい数式に 16 行目で求めた x を入れた値が返ってくる。この値と y の値を比較する。関数より内側にあるのならば、19 行目の count がインクリメントされる。この while 文が終わり、21 行目で、対象範囲の面積を計算している。22 行目の print で、面積*点の割合で、積分の近似値を出力する。

2.2 実行結果

NUM=1000 の時の実行結果を下記に示す。

```
/Users/Natsuki/report2/code% python monte.py
1.06468
```

また、NUM を 1 から 10000 までの実行結果のグラフを下記に示す。



緑色の線が実際の値で赤色の線がモンテカルロ法による近似値である。点の数が大きくなるほど、実際の値に近くなっていっている (収束していっている) ことがわかる。