デジタル信号処理
〜06 中間テスト〜

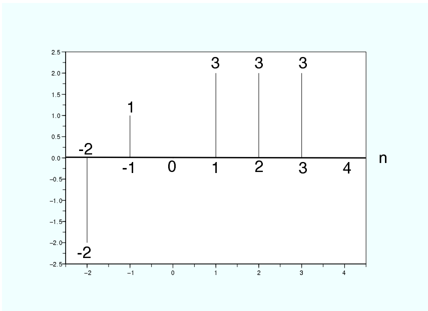
その場に居合わせた人

2007/6/14(木)

目 次

1　問題1

図の信号 x(n) を u(n) と $\delta(n)$ 関数を用いて表現せよ

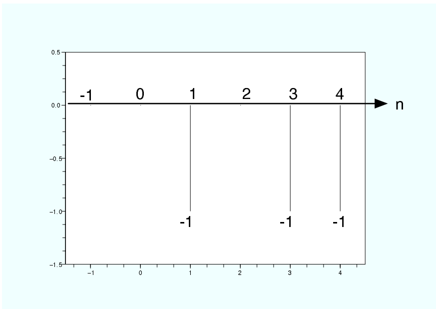


$$x(n) = -2\delta(n+2) + \delta(n+1) + 2\{u(n-1) - u(n-4)\}$$

2　問題2

次の信号をプロットせよ

$$x(n) = -\delta(-n+1) + u(-n+2) - u(-n+4)$$



3　問題3

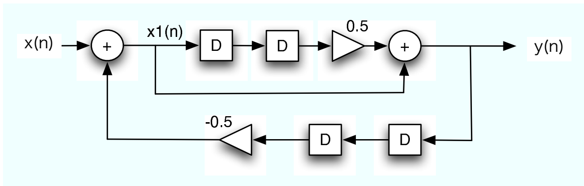
以下の２つの差分方程式を満足する離散時間システム（x(n):入力、y(n):出力）を構成せよ

$$\begin{cases} x1(n) = x(n) - 0.5y(n-2) \\ y(n) = x1(n) + 0.5x1(n-2) \end{cases}$$

答えは何通りかある

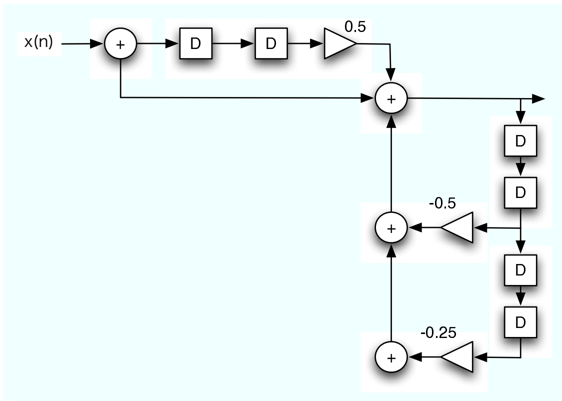
3.1　回答例１

$$y(n) = x(n) - 0.5y(n-2) + 0.5x(n-2) - 0.25y(n-4)$$



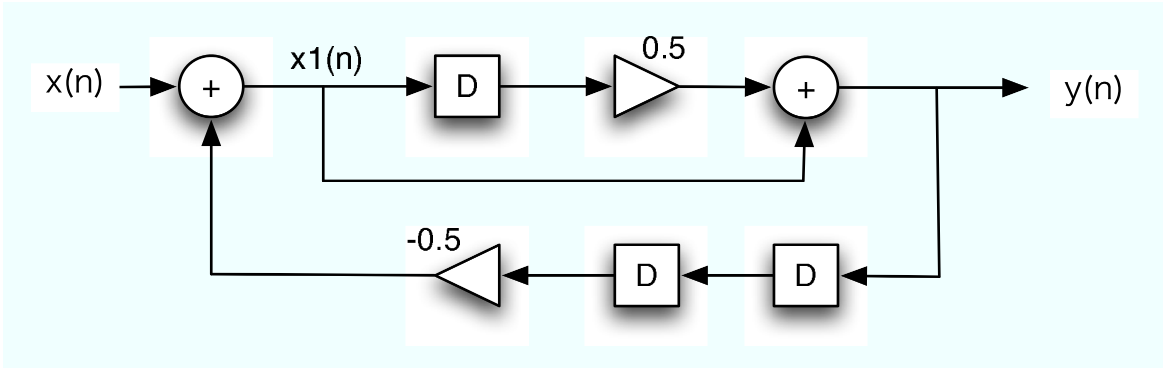
3.2　回答例２

$$y(n) = x(n) + 0.5x(n-2) - 0.5y(n-2) - 0.25y(n-4)$$



4　問題４

図に示す離散時間システムの差分方程式を導出せよ



$$x1(n) = x(n) - 0.5y(n-2)$$
$$y(n) = x1(n) + 0.5x1(n-1)$$

よって

$$y(n) = x(n) - 0.5y(n-2) + 0.5x(n-1) - 0.25y(n-3)$$

5 問題 5

次の出力を示すシステムの線形性、時不変性、因果性、安定性を判定せよ

$$y(n) = x(n) + 1$$

5.1 線形性

A,B を任意の実定数をする

$$R[Ax_1(n) + Bx_2(n)] = R[Ax_1(n) + Bx_2(n)] = Ax_1(n) + Bx_2(n) + 1$$
$$AR[x_1(n)] + BR[x_2(n)] = A\{x_1 + 1\} + B\{x_2 + 1\} = A\{x_1(n) + 1\} + B\{x_2(n) + 1\}$$
$$= Ax_1(n) + Bx_2(n) + A + B$$

よって線形性は無い

5.2 時不変性

k を任意の時間遅れとする

$$y(n-k) = x(n-k) + 1$$
$$R[x(n-k)] = x(n-k) + 1$$

よって時不変性はある

5.3 因果性

n=-1 とすると

$$y(n-1) = x(n-1) + 1$$

出力が未来の入力に影響されないので因果性はある

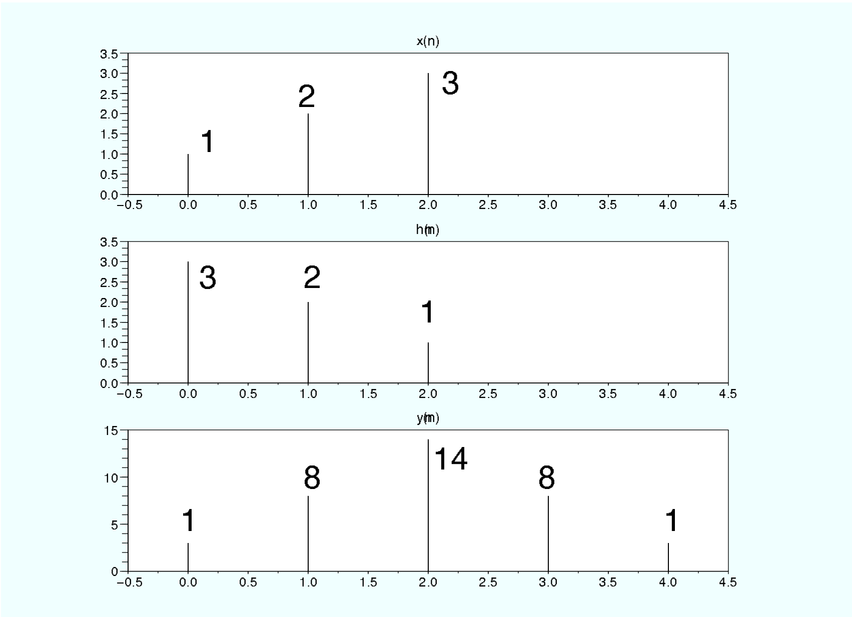
5.4 安定性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid \delta(n) + 1 \mid = \infty$$

よって安定性はない

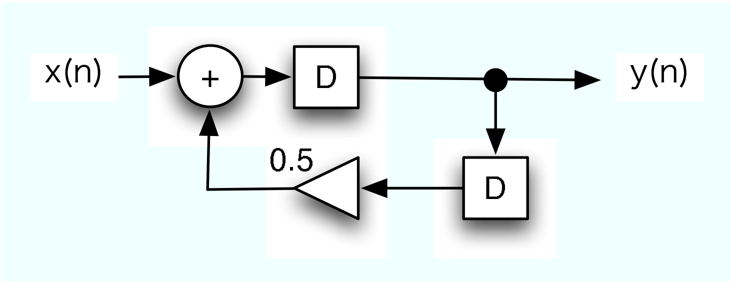
6 問題 6

図に示す離散時間システムの差分方程式を導出せよ



7　問題７

次の回路の差分方程式とインパルス応答を求めよ、ただし $y(-1) = 0, y(-2) = 0$



差分方程式は

$$y(n) = x(n-1) + 0.5y(n-2)$$

インパルス応答（入力は $\delta(n)$）は

$$\begin{aligned}
&n = 0 : y(0) = \delta(-1) + 0.5y(-2) = 0 \\
&n = 1 : y(1) = \delta(0) + 0.5y(-1) = 1 \\
&n = 2 : y(2) = \delta(1) + 0.5y(0) = 0 \\
&n = 3 : y(3) = 0.5y(1) = 0.5 \\
&n = 4 : y(4) = 0.5y(2) = 0 \\
&n = 5 : y(5) = 0.5y(3) = 0.25 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&n = 2k : y(2k) = 0 \\
&n = 2k+1 : y(2k+1) = (0.5)^k
\end{aligned}$$

なので

$$h(n) = \begin{cases} 0.5^k & (n = 2k+1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases}$$

8　問題８

次のインパルス応答を持つシステムは安定かどうか判断せよ

$$h(n) = \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} for : n > 0$$

$$
\begin{aligned}
&h(1) = \tfrac{(-1)^{(1+1)}}{1} = 1\\
&h(2) = \tfrac{(-1)^{(2+1)}}{2} = \tfrac{-1}{2}\\
&h(3) = \tfrac{(-1)^{(3+1)}}{3} = \tfrac{1}{3}\\
&h(4) = \tfrac{(-1)^{(4+1)}}{4} = \tfrac{-1}{4}\\
&\vdots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

よって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid h(n) \mid = \infty$$

なので不安定

9 問題9

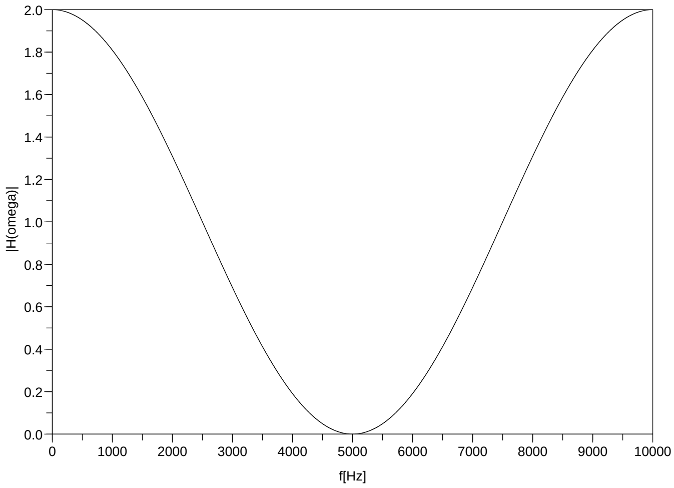
次のインパルス応答をもつ離散時間システムのフーリエ変換 $H(\omega)$ を求めよ
$T = 0.1ms$ の時の $\mid H(\omega) \mid$ をプロットせよ
$f = 1250Hz$ の時の $\mid H(\omega) \mid [dB]$ を求めよ

$$h(nT) = 0.5\delta(nT + T) + \delta(nT) + 0.5\delta(nT - T)$$

フーリエ変換は

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid h(nT)e^{-j\omega nT} \mid = \frac{1}{2}e^{j\omega T} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega T} = 1 + \frac{e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}}{2}\\
&= 1 + \frac{\{cos(\omega T) + jsin(\omega T)\} + \{cos(\omega T) - jsin(\omega T)\}}{2} = 1 + \frac{2cos(\omega T)}{2}\\
&= 1 + cos(\omega T)\\
\angle H(\omega) &= 0
\end{aligned}
$$

$T = 0.1ms$ のとき $\mid H(\omega) \mid$ をプロットすると



$T = 0.1ms$ のとき、$0.1ms = 0.1 * 10^{-3}s$ なので

$$\mid H(\omega) \mid_{f=1250} = 1 + cos(2\pi * 1250 * 0.1 * 10^{-3}) = 1 + cos\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$20log_{10} \mid H(\omega) \mid_{f=1250} = 20log_{10}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 20 * 0.232 = 4.64[dB]$$

参考文献

[1] 例題で学ぶデジタル信号処理
金城繁徳　尾知博　コロナ社　2004/9/15