デジタル信号処理
〜レポート 4〜

e055717 金城佑典

2007/5/25(金)

目 次

1　問題 2.1

1.1　問題 2.1(2)

$y(nT) = x^2(nT) + x(nT+T)$

1.1.1　線形性

A,B は任意の実定数

$$\begin{aligned}
&R[Ax_1(nT) + Bx_2(nT)] = \{Ax_1(nT) + Bx_2(nT)\}^2 + \{Ax_1(nT+T) + Bx_2(nT+T)\} \\
&\quad = A^2x_1^2(nT) + 2ABx_1(nT)x_2(nT) + B^2x_2^2(nT) + Ax_1(nT+T) + Bx_2(nT+T) \\
&AR[x_1(nT)] + BR[x_2(nT)] = A[x_1^2(nT) + x_1(nT+T)] + B[x_2^2(nT) + x_2(nT+T)] \\
&\quad = A[x_1^2(nT) + Ax_1(nT+T) + Bx_2^2(nT) + Bx_2(nT+T)
\end{aligned}$$

よって線形性はない

1.1.2　時不変性

k は任意の時間遅れ

$$\begin{aligned}
y(nT-kT) &= x^2(nT-kT) + x(nT-kT+T) \\
R[x(nT-kT)] &= x^2((nT-kT)) + x((nT-kT)+T)
\end{aligned}$$

よって時不変性がある

1.1.3　因果性

線形時不変システム（LSI）ではないので未来の出力が影響するかをしらべる
$n=-1$ とする

$$y(-T) = x^2(-T) + x(-T+T) = x^2(-T) + x(0)$$

$-T$ より未来の信号 $x(0)$ に影響されるので因果性はない

1.2　問題 2.1(4)

$y(nT) = a^n(nT-T)(|a|<1)$

1.2.1　線形性

A,B は任意の実定数

$$\begin{aligned}
&R[Ax_1(nT) + Bx_2(nT)] = R[Aa_1^n x(nT-T) + Ba^n x_2(nT-T)] \\
&\quad = Aa_1^n x(nT-T) + Ba^n x_2(nT-T) \\
&BR[x_1(nT)] + BR[x_2(nT)] = AR[a_1^n x(nT-T)] + BR[a^n x_2(nT-T)] \\
&\quad = Aa_1^n x(nT-T) + Ba^n x_2(nT-T)
\end{aligned}$$

よって線形性がある

1.2.2 時不変性

k は任意の時間遅れ

$$
\begin{aligned}
y(nT-kT) &= a^{n-k}x(nT-kT-T) \\
R[x(nT-kT)] &= a^{n}x(nT-kT-T)
\end{aligned}
$$

よって時不変性はない

1.2.3 因果性

線形時不変システム（LSI）ではないので未来の出力が影響するかをしらべる
$n=-1$ とする

$$
y(-T) = a^{-1}x(-T-T) = a^{-1} - 2T
$$

$-T$ より未来の信号に影響されていないので因果性あり

1.3 問題 2.1(6)

$y(nT) = \{an + x(nT+2T)\}^2 = a^2n^2 + 2anx(nT+2T) + x^2(nT+2T)$

1.3.1 線形性

A,B は任意の実定数

$R[Ax_1(nT)+Bx_2(nT)] = a^2n^2 + 2an[Ax_1(nT+2T)+Bx_2(nT+2T)] + [Ax_1(nT+2T)+Bx_2(nT+2T)]^2$
$BR[x_1(nT)] + BR[x_2(nT)] = A(a^2n^2 + 2anx_1(nT+2T)...$

よって線形性はない

1.3.2 時不変性

k は任意の時間遅れ

$$
\begin{aligned}
y(nT-kT) &= a^2(n-k)^2 + 2a(n-k)x(nT-kT+2T) + x^2(nT-kT+2T) \\
R[x(nT-kT)] &= a^2n^2 + 2anx(nT-kT+2T) + x^2(nT-kT+2T)
\end{aligned}
$$

よって時不変性はない

1.3.3 因果性

線形時不変システム（LSI）ではないので未来の出力が影響するかをしらべる
$n=-1$ とする

$$
\begin{aligned}
y(-T) &= a^2(-1)^2 + 2a(-1)x(-T+2T) + x^2(-T+2T) \\
&= a^2 - 2a(T) + x^2(T)
\end{aligned}
$$

$-T$ より未来の信号 $x^2(T)$ に影響されているので因果性なし

1.4　問題 2.5(1)

$a = [0, 1, 1, 0, 0], b = [2, 1, -1, -2, 0]$ なので $a(nT) * b(nT)$ のインパルス応答は

$a(0) * b(0) = 0$, $a(1) * b(1) = 2$, $a(2) * b(2) = 3$, $a(3) * b(3) = 0$, $a(4) * b(4) = -3$, $a(5) * b(5) = -2$

2　問題 2.7

$y(0) = a$, $y(1) = 0.5a + b$ が $y(nT) = \delta(nT)$ になるので $y(0) = 1$, $y(1) = 0$ にならないといけないから $\underline{a = 1 \text{ , } b = -0.5}$

3　問題 2.10

3.1　問題 2.10(2)

$h(nT) = u(nT) - u(nT - 100T)$、$u(n < 0) = 0$ なので

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid h(nT) \mid = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid u(nT) - u(nT - 100T) \mid = 100$$

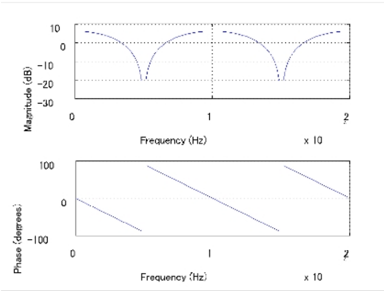
よって安定

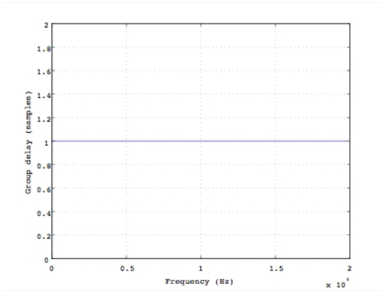
3.2　問題 2.10(3)

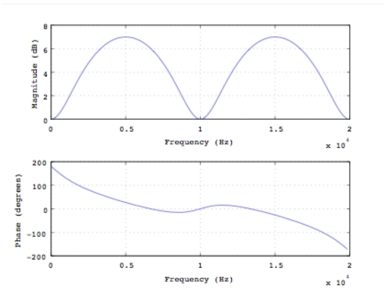
$h(nT) = (-1)^n + 1u(nT)$ なので

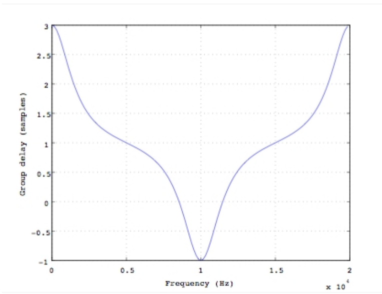
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid h(nT) \mid = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid (-1)^n + 1u(nT) \mid = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \infty$$

よって不安定









4　問題 3.2

4.1　問題 3.2(1)

4.2　問題 3.2(2)

5　問題 3.3

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega T}) &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} e^{-j\omega nT} = \frac{1}{3}\{e^{0} + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T}\} \\
&= \frac{1}{3}\frac{\{e^{0} + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T}\}}{1}\left(\frac{1-e^{-j\omega T}}{1-e^{-j\omega T}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\frac{\{1*(1-e^{-j\omega T}) + e^{-j\omega T}*(1-e^{-j\omega T}) + e^{-j\omega 2T}*(1-e^{-j\omega T})\}}{1-e^{-j\omega T}} \\
&= \frac{1}{3}\frac{\{1-e^{-j\omega T} + e^{-j\omega T} - e^{-j\omega 2T} + e^{-j\omega 2T} - e^{-j\omega 3T}\}}{1-e^{-j\omega T}} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1-e^{-j\omega 3T}}{1-e^{-j\omega T}}
\end{aligned}
$$

p ４１、例題 3.4(2) より

$$
\frac{1}{3}\left(\frac{1-e^{-j\omega 3T}}{1-e^{-j\omega T}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-(cos\frac{3}{2}\omega T)}{1-(cos\frac{1}{2}\omega T)}e^{-j\frac{3-1}{2}\omega T}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-(cos\frac{3}{2}\omega T)}{1-(cos\frac{1}{2}\omega T)}e^{-j\omega T}\right)
$$

$H(e^{j\omega T}) = M(\omega)\Theta(\omega)$ より

$$M(\omega) = \frac{1}{3} \mid \frac{sin\frac{3}{2}\omega T}{sin\frac{1}{2}\omega T} \mid$$

$M(\omega) = \mid H(e^{-j\omega T}) \mid = \sqrt{Re[H(e^{-j\omega T})]^2 + Im[H(e^{-j\omega T})]^2}$ より

$$M(\omega) = \mid \frac{1}{3}\left(\frac{sin\frac{3}{2}\omega T}{sin\frac{1}{2}\omega T}\right) \mid = \frac{1}{3} \mid \frac{sin\frac{3\omega T}{2}}{sin\frac{\omega T}{2}} \mid$$

6 問題 3.6

6.1 問題 3.6(b)

$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}$ より

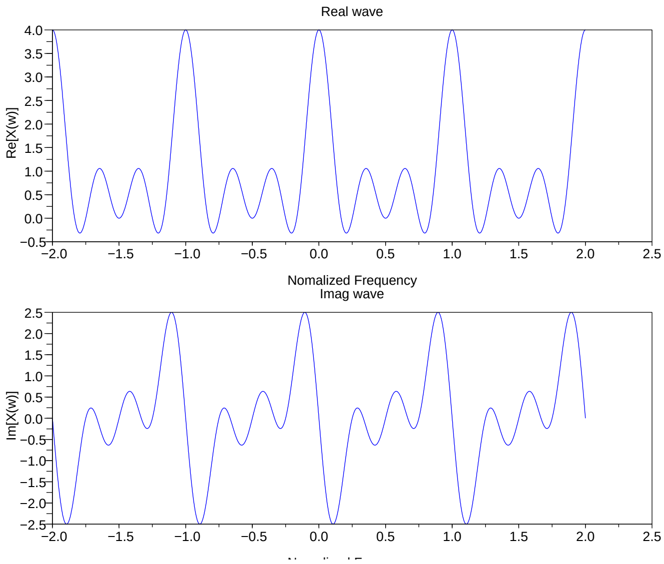
$$\begin{aligned} X(\omega) &= e^0 + 2e^{-j\omega T} + 3e^{-j\omega 2T} + 2e^{-j\omega 3T} + 1e^{-j\omega 24T} \\ &= \sum_{n=0}^{20} sin(2\pi fnT)e^{-j\omega nT} \end{aligned}$$

6.2 問題 3.6(2)

$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}$ より

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(nT) - u(nT - 20T)]sin(2\pi fnT)e^{-j\omega nT} \\ &= \sum_{n=0}^{20} sin(2\pi fnT)e^{-j\omega nT} \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1 - e^{-j\omega_1 20T}}{1 - e^{-j\omega_1 T}} - \frac{1 - e^{-j\omega_2 20T}}{1 - e^{-j\omega_2 T}}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{sin10\omega_1 T}{sin\omega_1\frac{T}{2}}e^{-j\frac{19}{2}\omega_1 T} - \frac{sin10\omega_2 T}{sin\omega_2\frac{T}{2}}e^{-j\frac{19}{2}\omega_2 T}\right) \end{aligned}$$

7　問題 3.8



参考文献

[1] 例題で学ぶデジタル信号処理

金城繁徳　尾知博　コロナ社　2004/9/15

[2] 例題で学ぶデジタル信号処理

http://www.wakayama-u.ac.jp/~kawahara/signalproc/Matlabsource/Matlabexamples.html