ディジタル信号処理 ／ 課題９

氏名　本村健太（もとむらけんた）
学籍番号　055762F

目 次

9.1　問題 5.5 (1)

$$y(nT) = x(nT - T) + 0.25y(nT - 2T) \qquad , \quad x(nT) = \delta(nT)$$

P.77／表 5.2 より、

$$x(nT) \quad \overset{z}{\longleftrightarrow} \quad X(z)$$

のとき、

$$x(nT - kT) \ \overset{z}{\longleftrightarrow} \ X(z)z^{-k}$$

であるから、両辺を z 変換すると、

$$Y(z) \quad = \quad X(z)z^{-1} + 0.25Y(z)z^{-2}$$

となる。これを $Y(z)$ について解くと、

$$Y(z) \quad = \quad \frac{z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}}X(z)$$

となる。ここで、$x(nT) = \delta(nT)$ であるから、$X(z) = 1$ であるが (P.77／表 5.1)、これを代入すると、

$$\begin{aligned} Y(z) \quad &= \quad \frac{z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}} \\ Y(z) \quad &= \quad \frac{z^{-1}}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} \end{aligned}$$

となる。

【参考】これは典型的な離散時間信号 $x(nT)$ の z 変換である。一般には、以下のような有理関数で与えられる。(P.78／式 5.3)

$$X(z) \quad = \quad \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}$$

この場合、$X(z)$ を部分分数で展開することにより、用意に逆 z 変換を求めることができる。

(つづく)

$Y(z)$ の分母多項式を零にする根 (極=pole) は、-0.5 と 0.5 である。

$$Y(z) \quad = \quad \frac{z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})} \qquad \text{(再掲)}$$

部分分数展開を行う。(P.78 ／ 5.2.2 参照)

$$Y(z) \quad = \quad \frac{A_1}{1+0.5z^{-1}} + \frac{A_2}{1-0.5z^{-1}}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_1 &= (1+0.5z^{-1})Y(z) \,\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{-0.5}} \\ &= \frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \,\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{-0.5}} \\ &= -1 \\ A_2 &= (1-0.5z^{-1})Y(z) \,\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{0.5}} \\ &= \frac{z^{-1}}{1+0.5z^{-1}} \,\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{0.5}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。すなわち

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{-1}{1+0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \\ &= -\frac{1}{1-(-0.5z^{-1})} + \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \end{aligned}$$

z 変換の定義 (P.75 ／式 5.1) を用いてもよいが、P.77 ／表 5.1「おもな離散時間信号の z 交換」を用いると、$Y(z)$ の逆 z 変換 $y(nT)$ は以下のように決まる。

$$\begin{aligned} y(nT) &= -(-0.5)^n u(nT) + (0.5)^n u(nT) \\ &= \left\{-(-0.5)^n + (0.5)^n\right\} u(nT) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9.2 問題 5.6 (3)

$$y(nT) = x(nT-T) + \frac{1}{2}y(nT-T)$$

z 変換を行うと

$$Y(z) = X(z)z^{-1} - \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

となる。これを $Y(z)$ について解くと

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)Y(z) &= X(z)z^{-1} \\ Y(z) &= \frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}X(z)\end{aligned}$$

となる。伝達関数を $H(z)$ とすると、定義により伝達関数 $H(z)$ は次式となる。

$$\begin{aligned}H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{z^{-1}}{1+0.5z^{-1}} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

インパルス応答 $h(nT)$ を求める。伝達関数の逆 z 変換を行う。(参考：P.77 ／表 5.1、P.77 ／例題 5.2(1))

$$\begin{aligned}H(z) &= \frac{z^{-1}}{1-(-0.5)z^{-1}} \\ \therefore h(nT) &= (-0.5)^{n-1}u(nT-T) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

【参考】

$$a^{n-k}u(nT-kT) = \frac{z^{-k}}{1-az^{-1}}$$

【例】

$$a^{n-2}u(nT-2T) = \frac{z^{-2}}{1-az^{-1}}$$

※↑これは確証はないのだが、こうでないと解答の辻褄が合わない。

9.3　問題 5.6 (5)

$$y(nT) = x(nT) + x(nT-2T) + \frac{1}{4}y(nT-2T)$$

z 変換を行い、$Y(z)$ について解くと

$$\begin{aligned}
Y(z) &= X(z) + X(z)z^{-2} + \frac{1}{4}Y(z)z^{-2} \\
\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)Y(z) &= (1+z^{-2})X(z) \\
Y(z) &= \frac{1+z^{-2}}{1-0.25z^{-2}}X(z)
\end{aligned}$$

であり、伝達関数 $H(z)$ は次式となる。

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-2}}{1-0.25z^{-2}} \quad \blacksquare \\
&= -4 + \frac{5}{1-0.25z^{-1}} \quad \text{(教科書の解答／逆 } z \text{ 変換のための形)}
\end{aligned}$$

伝達関数の逆 z 変換からインパルス応答 $h(nT)$ を求める。まず、

$$-4 \quad \overset{z}{\longleftrightarrow} \quad -4\delta(nT)$$

であるが、以下に定義する $H'(z)$ は部分分数展開を用いて解く。

$$H'(z) = H(z) - (-4) = \frac{5}{1-0.25z^{-1}}$$

$H'(z)$ の極は 0.5 と-0.5 である。

$$\begin{aligned}
H'(z) &= \frac{A_1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{A_2}{1+0.5z^{-1}} \\
A_1 &= (1-0.5z^{-1})H'(z)\ \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{0.5}} \\
&= \frac{5}{1+0.5z^{-1}}\ \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{0.5}} \\
&= 2.5 \\
A_2 &= (1+0.5z^{-1})H'(z)\ \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{0.5}} \\
&= \frac{5}{1-0.5z^{-1}}\ \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{0.5}} \\
&= 2.5 \\
\therefore H'(z) &= \frac{2.5}{1-0.5z^{-1}} + \frac{2.5}{1+0.5z^{-1}} \\
&= 2.5\left(\frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-(-0.5)z^{-1}}\right) \\
&= 2.5\left((0.5)^n u(nT) + (-0.5)^n u(nT)\right) \\
\therefore h(nT) &= -4\delta(nT) + 2.5\left((0.5)^n + (-0.5)^n\right)u(nT) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

9.4　問題 5.7

図 (a) の回路について、差分方程式を求める。

$$y(nT) \quad = \quad h_0 x(nT) + h_1 x(nT - T) + h_2 x(nT - 2T)$$

z 変換すると

$$Y(z) \quad = \quad h_0 X(z) + h_1 X(z) z^{-1} + h_2 X(z) z^{-2}$$

伝達関数を $H_a(z)$ とすると

$$H_a(z) \quad = \quad h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

図 (b) の回路について、差分方程式を求める。

$$y(nT) \quad = \quad w_2 x(nT) + w_1 x(nT - T) + w_0 x(nT - 2T)$$

z 変換すると

$$Y(z) \quad = \quad w_2 X(z) + w_1 X(z) z^{-1} + w_0 X(z) z^{-2}$$

伝達関数を $H_b(z)$ とすると

$$H_b(z) \quad = \quad w_2 + w_1 z^{-1} + w_0 z^{-2}$$

以上より、

$$h_0 = w_2\ ,\ h_1 = w_1\ ,\ h_2 = w_0$$

であれば同じ伝達関数を持つ回路となる。

9.5 問題 5.8 (d)

9.5.1 問題 5.8 (d) (1) 伝達関数

図 (d) の回路について、差分方程式を求める。

$$\begin{aligned} y(nT) &= x_1(nT-T) \\ x_1(nT) &= kx(nT)+ka_1x(nT-T)+(-b_1)x_1(nT-T)+(-b_2)x_1(nT-2T) \end{aligned}$$

z 変換すると

$$\begin{aligned} Y(z) &= X_1(z)z^{-1} \\ X_1(z) &= kX(z)+ka_1X(z)z^{-1}-b_1X_1(z)z^{-1}-b_2X_1(z)z^{-2} \end{aligned}$$

$X_1(z)$ を $X(z)$ について解くと

$$\begin{aligned} X_1(z)+b_1X_1(z)z^{-1}+b_2X_1(z)z^{-2} &= kX(z)+ka_1X(z)z^{-1} \\ X_1(z)(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2})X_1(z) &= (k+ka_1z^{-1})X(z) \\ X(z) &= \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{k+ka_1z^{-1}}X_1(z) \end{aligned}$$

伝達関数を $H(z)$ とすると

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= z^{-1}\frac{k+ka_1z^{-1}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}} \\ &= \frac{k(1+a_1z^{-1})}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}z^{-1} \end{aligned}$$

これに

$$\begin{cases} r &= 0.8 \\ w &= -2\cos(\frac{\pi}{5}) \;=\; -1.618034 \\ k &= (r-1)w \;=\; 0.3236068 \\ a_1 &= \frac{r+1}{w} \;=\; -1.1124612 \\ b_1 &= rw \;=\; -1.2944272 \\ b_2 &= r^2 \;=\; 0.64 \end{cases}$$

を代入すると

$$H(z) = \frac{0.3236068\times(1-1.1124612z^{-1})}{1-1.2944272z^{-1}+0.64z^{-2}}z^{-1} \quad \blacksquare$$

9.5.2 問題 5.8 (d) 定数算出用 Scilba スクリプト

◆ s05_08_val.txt

```
r=0.8;
w=-2*cos(%pi/5);
k=(r-1)*w;
a1=(r+1)/w;
b1=r*w;
b2=r*r;

val = [r w k a1 b1 b2];

// ***RESULT***
// 0.8  -1.618034    0.3236068  -1.1124612  -1.2944272    0.64
```

9.5.3 問題 5.8 (d) (2) インパルス応答

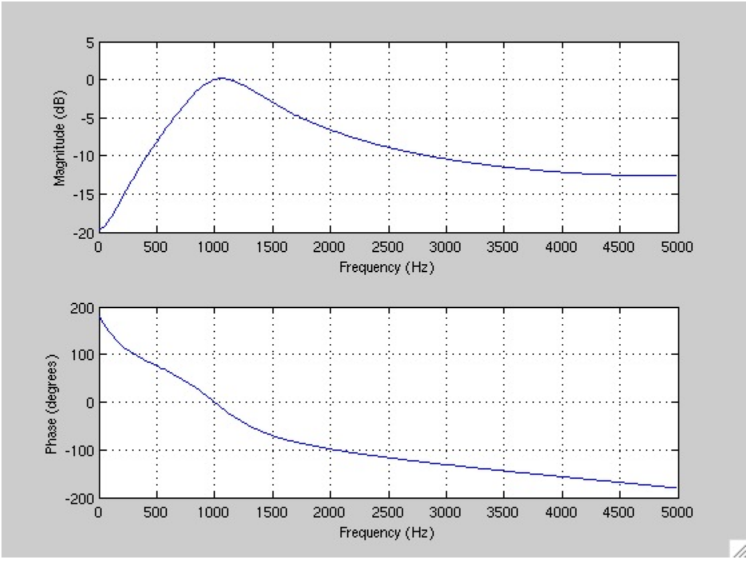
$$H(z) = \frac{k(1 + a_1 z^{-1})}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} z^{-1}$$

の逆 z 変換を手計算でやるのは無理でした。Matlab があればいいのですが…。教科書の解答によると以下のようなインパルス応答が得られるようです。

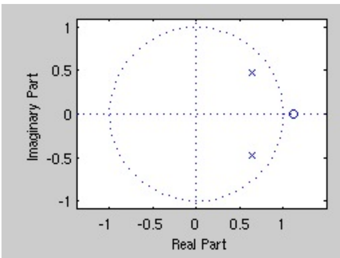
```
n   y(nT)
0   0
1   1
2   0.1819
3   -0.4045
4   -0.6401
5   -0.5696
6   -0.3276
(以下省略)
```

9.6　リスト 5.3

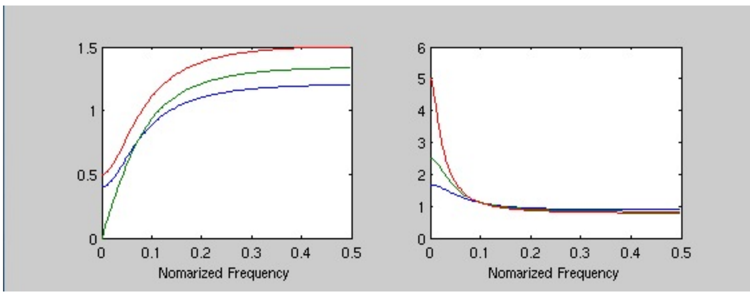
(2007/07/30) Matlab 入手



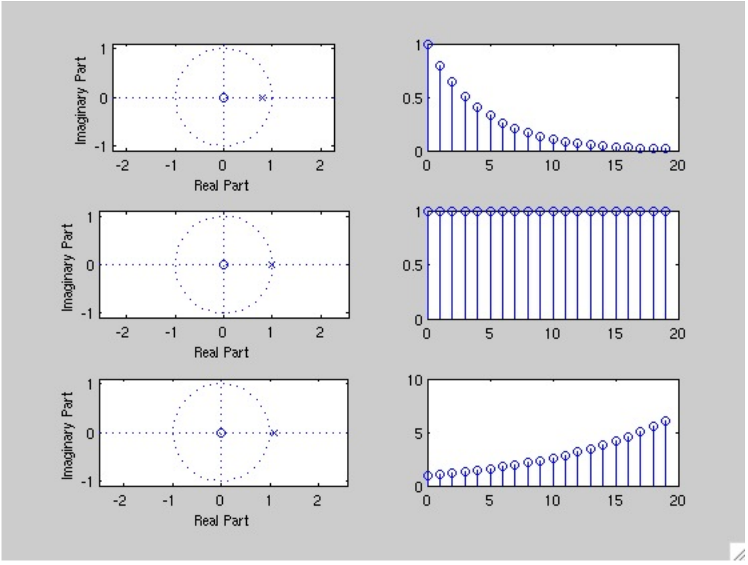
9.7　リスト 5.4



9.8　リスト 5.5



9.9 リスト 5.6



055762F 本村健太 ／ 2007.08.04(Sat) PM18:08
with LaTeX & Matlab