My solution

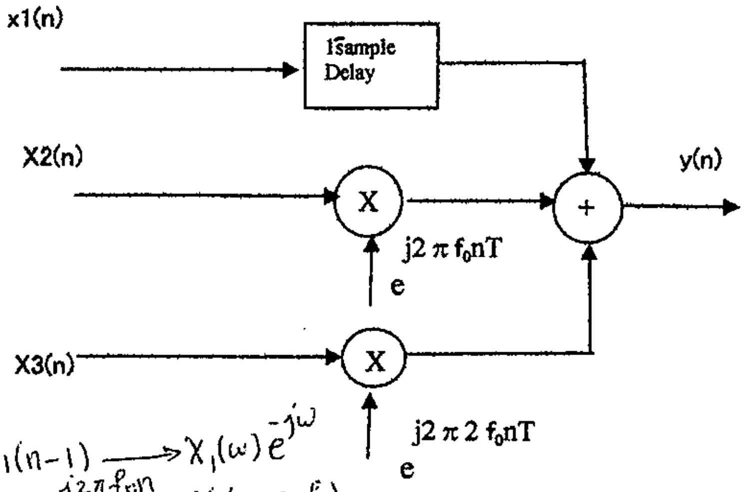
M.R.Asharif

2006/8/3

Digital Signal Processing
Undergraduate Course **Student's Name:**
Last-Term Examination **Sudent's No.**
2006.8.4 **(Each problem scored equally)**

University of the Ryukyus
Faculty of Engineering
Dept. of Information Eng.
Prof. M.R. Asharif

1－ 次の図 1(a)のような回路がある。x1(n), x2(n)と x3(n)のフーリエ変換 X1(w),X2(w)と X3(w)の図 1 (b)示唆された。出力 y(n)のフーリエ変換 Y(w)を求めよ。概略を示せ。ただし、f_0=2 kHz。T=1とする



$x_1(n-1) \longrightarrow X_1(\omega)e^{-j\omega}$

$x_2(n)e^{j2\pi f_0 n} \longrightarrow X_2(\omega-2\pi f_0)$

$x_3(n)e^{j2\pi 2 f_0 n} \longrightarrow X_3(\omega-4\pi f_0)$

Fig.1a

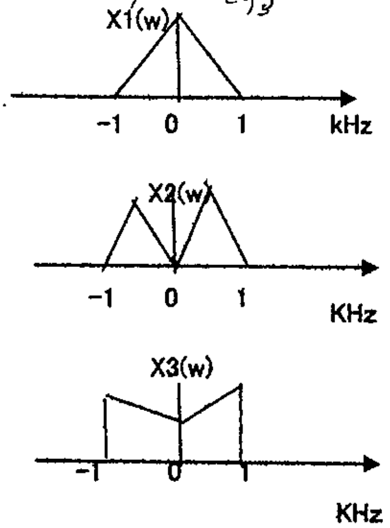
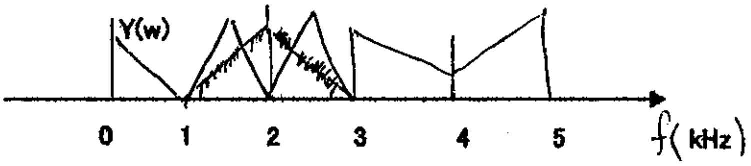


Fig.1b

Y(w) $= X_1(\omega)e^{-j\omega} + X_2(\omega-2\pi f_0) + X_3(\omega-4\pi f_0)$



tint on back page

2－ 離散時間システムのフーリエ変換 X(w)は下記のようにあります。時間領域 x(n)のサンペルを求めよう。(T=1)とする

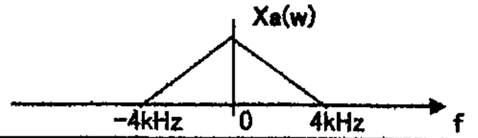
X(w) = 1+ cos(w) $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$

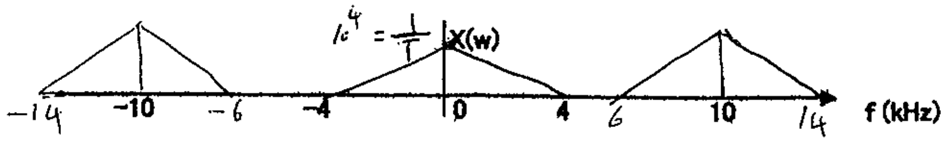
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\omega)e^{j\omega n}d\omega$

$\boxed{x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n-1)}$

3－図の振幅スペクトルを持つ連続時間 xa(t)を fs＝10 kHz のサンプリング周期でサンプリングした。離散時間の振幅スペクトルの概略を示せ。

$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{10000} = 10^{-4}$ sec.





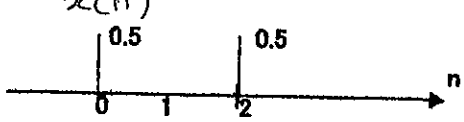
$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(n+1)}d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(n-1)}d\omega\right.$

$\boxed{x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n-1)}$

this part mostly has not been solved by students so removed from score

4– つぎの有限信号 x(n)の DFT、X(k)を下記の形求めよ。(N=3) , $(T=1)$

もし離散時間信号 x(n)は周期性を持つ(長さ N=3)実数信号とそのDFTは X(k)あれば、下記の関係を証明しよ X(N-k)=X*(k)



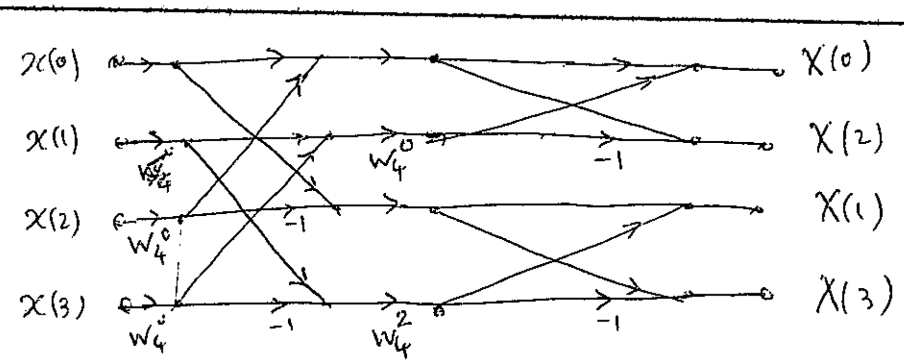
$$X^*(k) = \sum_{n=0}^{2} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi n k}{3}} = 0.5 + 0.5\, e^{-j\frac{2\pi \times 2k}{3}}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi k}{3}}\left[\frac{e^{j\frac{2\pi k}{3}} + e^{-j\frac{2\pi k}{3}}}{2}\right] = e^{-j\frac{2\pi k}{3}} \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$$

$X(k) = e^{\cdots} \cos(\cdots) \leftarrow$ To write in this form

$$\boxed{X(k) = e^{-j\frac{2\pi k}{3}} \cos\frac{2\pi k}{3}}$$

5– 4 点 FFT のシグナルフロー図を描け。ただし、入力信吾の自然順の方法を使える。



6– N=64 点として、DFT と FFT の乗算回数を比較して、bitreversal 入力で 15 所で、どの入力サンプルを入れるでしょうか。

$$\boxed{\frac{\text{FFT}}{\text{DFT}} = \frac{\frac{N}{2}\log_2 N}{N^2} = \frac{32 \times 6}{64 \times 64} = \frac{3}{64} \simeq 0.046 \quad \text{x} \; (60)}$$

$$15 = \underbrace{001111}_{6} \xrightarrow{\text{bitreversal}} 111100 = 60$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi n k}{N}} = Re[X(k)] + j\, Im[X(k)]$$

$$X(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi n (N-k)}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{j\frac{2\pi n k}{N}} \qquad (1)$$

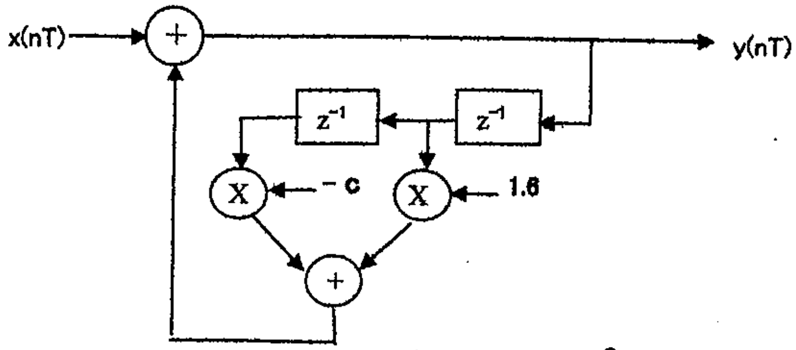
If $x(n)$ is real then

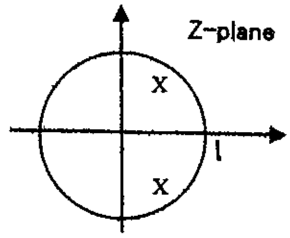
$$X^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{j\frac{2\pi n k}{N}} = Re[X(k)] - j\, Im[X(k)] \qquad (2)$$

from (1), (2) Then $\rightarrow X(N-k) = X^*(k)$

7− 以下の図に示した、2次 IIR ディジタルフィルタです。システムが安定となるための c に関する必要十分条件を示せ。但し、フィルタの極は複数と考えます、 Zp=a+jb.。
(T=1)

$$y(n) = x(n) + 1.6\,y(n-1) - c\,y(n-2)$$





$\boxed{|c| < 1}$

$$Y(z) = X(z) + 1.6 z^{-1} Y(z) - c z^{-2} Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 1.6 z^{-1} + c z^{-2}}$$

$$Z_p^2 - 1.6 Z_p + c = 0$$

$$Z_p = 0.8 \pm \sqrt{0.64 - c} = 0.8 \pm j\sqrt{c - 0.64}$$

$$|Z_p| < 1$$

$$|Z_p| = |0.64 + c - 0.64| < 1$$

$$|c| < 1$$

8− 次の式を逆 Z 変換せよ。$X(z) = \dfrac{1 - z^{-3}}{1 - z^{-1}} = \dfrac{\cancel{(1-z^{-1})}(1 + z^{-1} + z^{-2})}{\cancel{1 - z^{-1}}} = 1 + z^{-1} + z^{-2}$

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$x(n) = [\underline{1}\ \ 1\ \ 1]$$

$\boxed{x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)}$

or, $u(n) - u(n-3)$

9− 次の差分方程式は、ある離散時間線形時不変システム(IIR デイジタルフィルター)の入出力関係を表している。 $y(nT) = x(nT) - 0.5y(nT - T)$

$$Y(z) = X(z) - 0.5 z^{-1} Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 0.5 z^{-1}}$$

✓1− デイジタルフィルターの伝達関数 H(z)を求めよ。

✓2− このIIR デイジタルフィルターは安定性を調べよ。 $Z_p = 0.5 \rightarrow$ stable

3−周波数特性を求め、T=0. 1ms の時に、周波数特性を f=0～5000 Hz までプロットせよ。

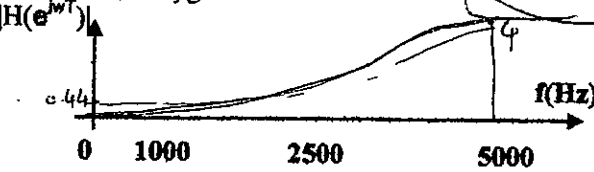
4− もし入力信号 $x(nT) = \delta(nT) + 0.5\delta(nT - T)$ とすると、出力信号 y(nT)を求めよ。 $X(z) = 1 + 0.5 z^{-1}$

Solution on the back page

1- $H(z) = \dfrac{1}{1 + 0.5 z^{-1}}$

2- 安定である　　安定ではない

3- $|H(e^{j\omega T})|$



4- $y(nT) = \delta(nT)$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1}{1 + 0.5 z^{-1}} (1 + 0.5 z^{-1})$$

$$Y(z) = 1$$

$$y(nT) = \delta(nT)$$