My solution
M.R. Asharif
2007/8/10

Digital Signal Processing
Undergraduate Course — **Student's Name:**
Last-Term Examination — **Sudent's No.**
2007.8.10 — ***(Each problem scored equally)***

University of the Ryukyus
Faculty of Engineering
Dept. of Information Eng.
Prof. M.R. Asharif

***1*-**次の図 1(a)のような回路がある。x1(nT), のフーリエ変換 X1(w), が、図1(b)に示されている。出力 y(nT)のフーリエ変換 Y(w)を求めよ。また、概略を示せ。ただし、f_0=1 kHz とする。

$x_2(nT) = x(n-3)T$

$x_3(nT) = x(n-1)T$

$X_2(w) = X(w)\, e^{-j3wT}$

$X_3(w) = X(w)\, e^{-jwT}$

$x_4(nT) = x(n-3)T\, e^{j2\pi f_0 nT}$

$X_4(w) = X(w-2\pi f_0)\, e^{-j3(w-2\pi f_0)T}$

$X_5(w) = X(w-2\pi\times 3f_0)\, e^{-j(w-2\pi\times 3f_0)T}$

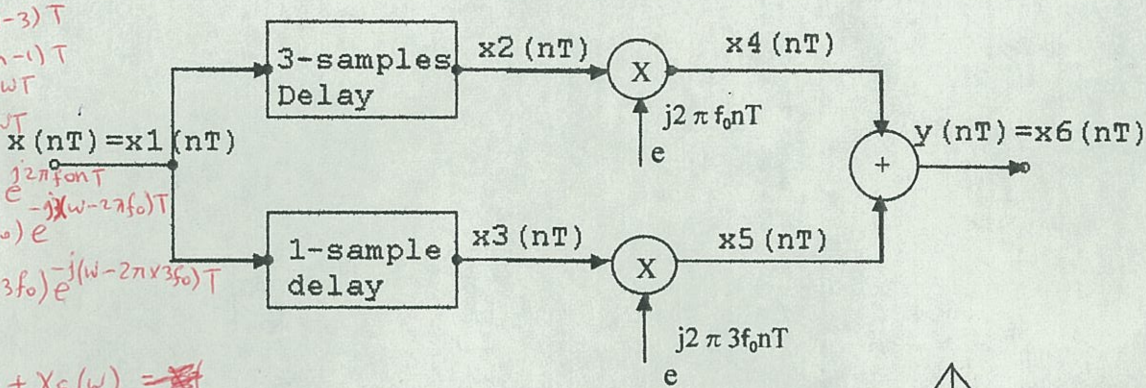


Fig.1a

$Y(w) = X_4(w) + X_5(w)$

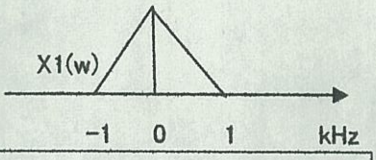
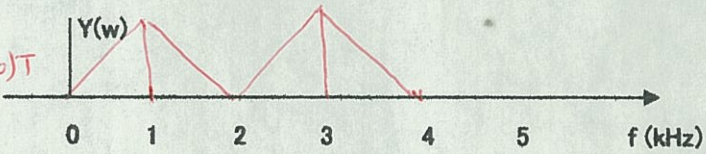


Fig.1b

Y(w) = $X(w-2\pi f_0)\, e^{-j3(w-2\pi f_0)T} + X(w-2\pi\times 3f_0)\, e^{-j(w-2\pi\times 3f_0)T}$



***2*-**離散時間システムのフーリエ変換 H(w)は下記のようになる。時間領域 h(n)を求めよ。T=1 とする。

H(w) = 2 cos(w) e^{-jw}

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(w)\, e^{jwn}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos w\, e^{-jw} e^{jwn}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{jw} + e^{-jw})\, e^{-jw} e^{jwn}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jwn}\, dw + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(n-2)}\, dw = \delta(n) + \delta(n-2)$$

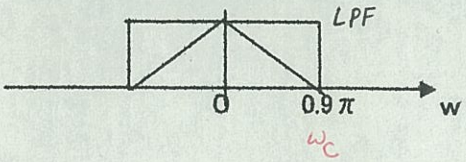
h(n)= $\delta(n) + \delta(n-2)$

***3*-** ある電話音声信号の4kHz 帯域において、サンプリング周期 T sec でサンプリングされた離散時間信号をつくる。その離散時間信号に対して $w_{cut\text{-}off}$=0.9 π の LPF のデジタルフィルタリングを行う。最大サンプリング周期(T_{Max})を求めよ。ただし、LPF によって音声情報が失われないこととする。

$w_c \leq 0.9\pi$

$w_c = \Omega_c T \leq 0.9\pi$

$\Omega_c = 4000\times 2\pi$



$4000\times 2\pi\, T_{Max} = 0.9\pi$

$$T_{Max} = \frac{0.9\pi}{2\pi\times 4000} = \boxed{\frac{9}{8}\times 10^{-4}\ \text{sec.}}$$

4- つぎの有限信号 x(n)の DFT, X(k), を求めよ。但し N=4 、T=1 とする。

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi nK}{N}} \qquad X(n)=\{\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{0},\ 1,\ 2,\ 3\}$$

$N=4$

X(0)= 6	X(1)= $-2+2j$	X(2)= -2	X(3)= $-2-2j$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi nk}{4}}$$

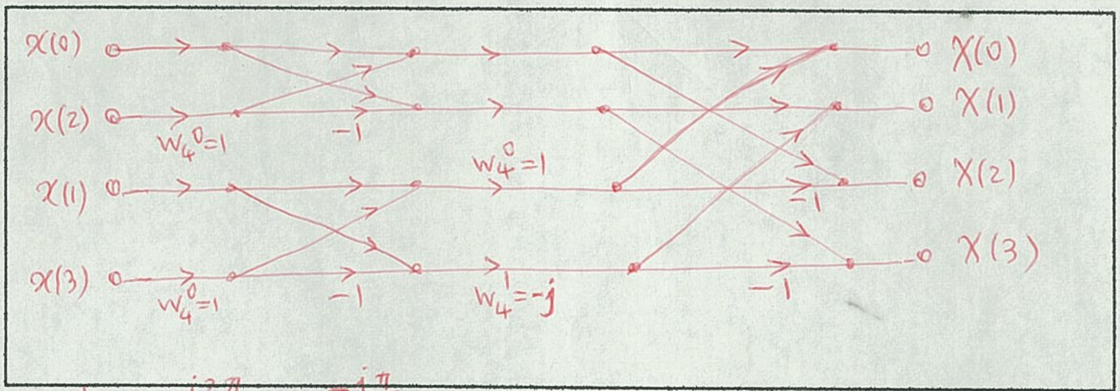
$$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) = 0+1+2+3 = \boxed{6}$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi n\times 1}{4}} = 0 + e^{-j\frac{2\pi}{4}} + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}} = -j-2+3j = \boxed{-2+2j}$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-jn\pi} = 0 + e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} + 3e^{-j3\pi} = -1+2-3 = \boxed{-2}$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\, e^{-j\frac{3\pi n}{2}} = 0 + e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j3\pi} + 3e^{-j\frac{9\pi}{2}} = j-2-3j = \boxed{-2-2j}$$

5- 4 点 FFT のシグナルフロー図を描け。ただし、出力信号は自然順とする。



$$W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

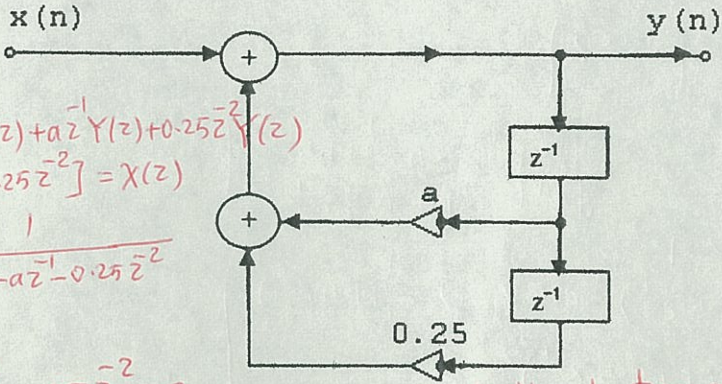
6- N=32 点として、DFT と FFT の乗算回数を比較せよ。また、bitreversal 入力で 14 番目にどの入力サンプルが入るか。

$$\frac{\text{FFT}}{\text{DFT}} = \frac{\frac{N}{2}\log_2 N}{N^2} = \frac{16\times 5}{32\times 32} = \frac{5}{64} = 0.078 \qquad x\,(\,14\,)$$

$$14 = \underbrace{01110}_{5} \xrightarrow{\text{bitreversal}} 01110 = 14$$

7- 以下に2次 IIR ディジタルフィルタの図を示す。フィルタの極は重解であるための a を求めよ。(T=1)

$y(n) = x(n) + a\,y(n-1) + 0.25\,y(n-2)$



a= $\pm j$

$Y(z) = X(z) + a z^{-1} Y(z) + 0.25 z^{-2} Y(z)$

$Y(z)[1 - a z^{-1} - 0.25 z^{-2}] = X(z)$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a z^{-1} - 0.25 z^{-2}}$

$1 - a z^{-1} - 0.25 z^{-2} = 0$

$z_p^2 - a z_p - 0.25 = 0$

$z_p = \frac{a \pm \sqrt{a^2+1}}{2}$

For having double pole at same place:

$a^2 + 1 = 0$

$a = \pm j$

for $a = j \longrightarrow z_p = \frac{a}{2} = j0.5$

8- 次の式を逆 Z 変換せよ。$H(z) = \dfrac{2 - 5z^{-1} + 1.5z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2 (1 + 0.5 z^{-1})}$

(See back page)

h(n)= $2(-0.5)^n u(n) - n\,u(n)$

9- 次の差分方程式は、ある離散時間線形時不変システム(IIR デイジタルフィルター)の入出力関係を表している。 $y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 2.5\,y(n-1) - y(n-2)$

1- ディジタルフィルターの伝達関数 H(z)を求めよ。

2- このIIR ディジタルフィルターの安定性を調べよ。

3- 逆システムのインパルス応答 $h(n)^{-1}$ を求めよ。

$\Longrightarrow Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z) + 2.5z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z)$

$Y(z)[1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}] = (1 - 2z^{-1})X(z)$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}}$

1- H(z)= $\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$

2- 安定である　　　安定ではない

3- $h(n)^{-1} = \delta(n) - 0.5\,\delta(n-1)$

$$\boxed{H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}}$$

since zero at $z_z = 2$ cancel out $z_p = 2$ (pole at same place), then, we have only one pole at $z_p = 0.5$ which is inside unit circle, then system is stable.

$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = 1 - 0.5z^{-1} \Longrightarrow h^{-1}(n) = \delta(n) - 0.5\,\delta(n-1)$

$$8-\quad H(z)=\frac{A}{1+0.5z^{-1}}+\frac{B}{1-z^{-1}}+\frac{C}{(1-z^{-1})^2}$$

$$A=(1+0.5z^{-1})H(z)\Big|_{\substack{z=-0.5\\ z^{-1}=-2}}=\frac{2-5z^{-1}+1.5z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}\Big|_{z^{-1}=-2}=\frac{2-5(-2)+1.5(-2)^2}{(1+2)^2}$$

$$A=\frac{2+10+6}{9}=\frac{18}{9}=\boxed{2}$$

$$B=-\frac{d}{dz^{-1}}\left[(1-z^{-1})^2\cdot H(z)\right]_{z=1}=-\frac{d}{dz^{-1}}\left[\frac{2-5z^{-1}+1.5z^{-2}}{1+0.5z^{-1}}\right]$$

$$B=-\frac{(-5+3z^{-1})(1+0.5z^{-1})-0.5(2-5z^{-1}+1.5z^{-2})}{(1+0.5z^{-1})^2}\Big|_{z^{-1}=1}$$

$$B=-\frac{(-5+3)(1+0.5)-0.5(2-5+1.5)}{(1.5)^2}=-\frac{-2\times1.5+0.5\times1.5}{(1.5)^2}=-\frac{-2+0.5}{1.5}=\boxed{1}$$

$$C=(1-z^{-1})^2\cdot H(z)\Big|_{z=1}=\frac{2-5z^{-1}+1.5z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})}\Big|_{z^{-1}=1}=\frac{2-5+1.5}{1.5}=\frac{-1.5}{1.5}=\boxed{-1}$$

$$H(z)=\frac{2}{1+0.5z^{-1}}+\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{(1-z^{-1})^2}=\frac{2}{1+0.5z^{-1}}-\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$\boxed{h(n)=2(-0.5)^n u(n)-n\,u(n)}$$