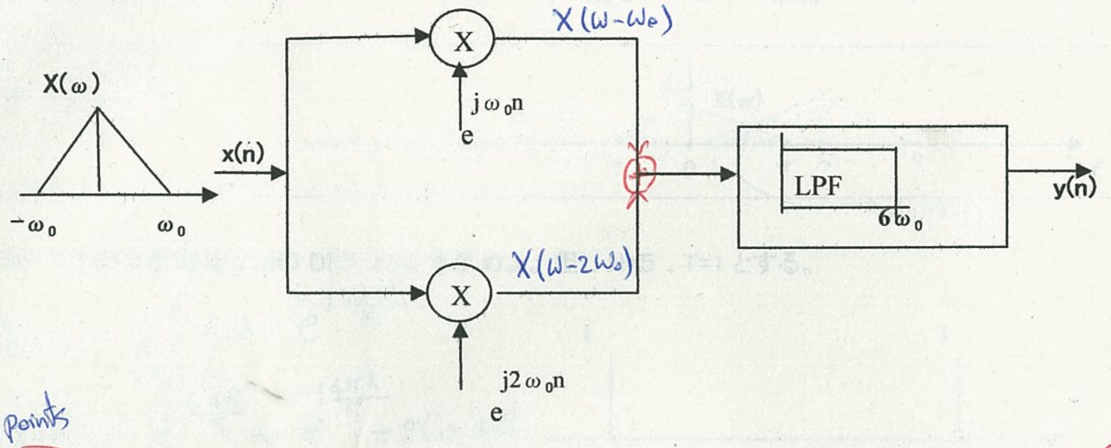
My solution
2010/8/12

Digital Signal Processing — **University of the Ryukyus**
Undergraduate Course — **Student's Name:** — **Faculty of Engineering**
Last-Term Examination — **Sudent's No.** — **Dept. of Information Eng.**
2010.8.6 — ***(Each problem scored equally)*** — **Prof. M.R. Asharif**

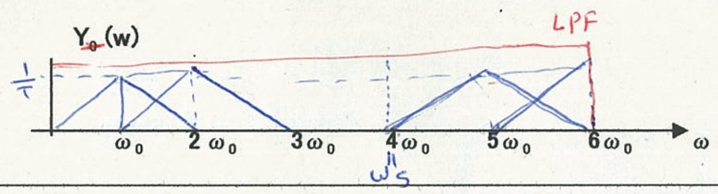
~~~~~~

1－次の図のような回路がある。x(nT), のフーリエ変換 X(w), が、図示されている。出力 y(nT)のフーリエ変換 Y(w)を求めよ。また、概略を示せ。ただし、T=1, $\omega_s = 4\omega_0$とする。

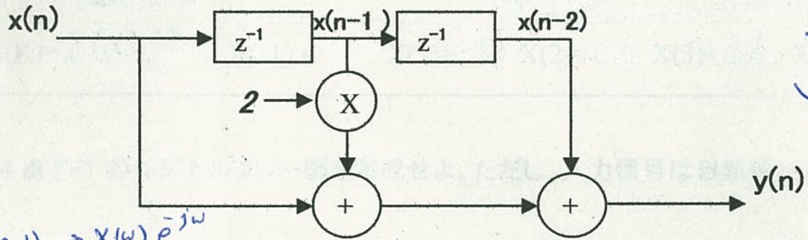


7 points — 3 points

$Y(w) = X(\omega-\omega_0) + X(\omega-2\omega_0)$



2－次の図でＦＩＲ-Digital Filter の入力の周波数領域が X(w)とすると、出力の周波数領域 Y(w)を求めよ。



$$Y(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega}\left[e^{j\omega}+2+e^{-j\omega}\right]$$
$$Y(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega}\left[e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}\right]^2$$
$$Y(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega}\left[2\cos\frac{\omega}{2}\right]^2$$

$$x(n-1) \longrightarrow X(\omega)e^{-j\omega}$$
$$x(n-2) \longrightarrow X(\omega)e^{-j2\omega}$$
$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$
$$Y(\omega) = X(\omega) + 2X(\omega)e^{-j\omega} + X(\omega)e^{-j2\omega}$$
$$Y(\omega) = X(\omega)\left[1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}\right]$$

$Y(w) = 4X(\omega)e^{-j\omega}\cos^2\frac{\omega}{2}$

3-離散時間システムのフーリエ変換 H(w)は下記のようになる。時間領域 h(n)を求めよ。T=1 とする。

H(w) = 2 cos(w)

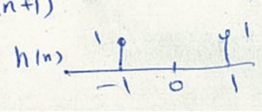
$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos\omega\, e^{+j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n+1)}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-1)}\,d\omega$$

$h(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1)$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega(n+1)}}{j(n+1)}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega(n-1)}}{j(n-1)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\pi(n+1)}-e^{-j\pi(n+1)}}{j(n+1)}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\pi(n-1)}-e^{-j\pi(n-1)}}{j(n-1)}\right] = \frac{\sin[\pi(n+1)]}{\pi(n+1)} + \frac{\sin[\pi(n-1)]}{\pi(n-1)}$$

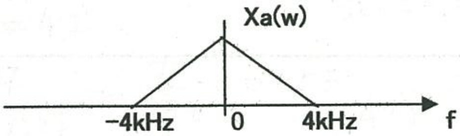


$$h(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1)$$
~~~~~~

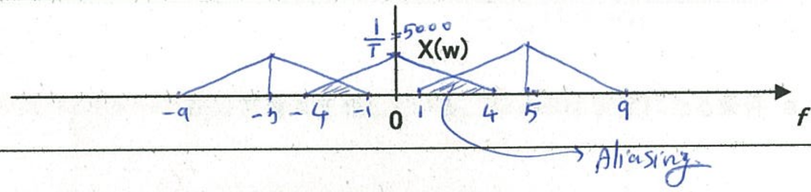
***4*—** 図の振幅スペクトルを持つ連続時間 x(t)を T＝0.2 msec のサンプリング周期でサンプリングした。離散時間の振幅スペクトルの概略を示せ。

$T = 0.2\,m\,sec.$

$f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.2} = 5\,KHz$



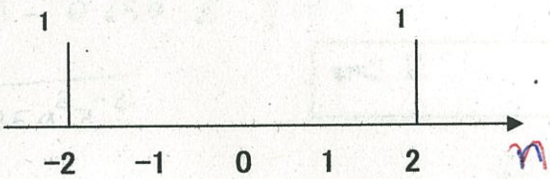
fs= 5 KHz



***5*—** つぎの有限信号 x(n)の DFT, X(k), を求めよ。但し N=5 、T=1 とする。

$X(K) = \sum_{n=-2}^{2} x(n)\, e^{-\frac{j2\pi nK}{N}}$

$X(K) = e^{\frac{j4\pi K}{5}} + e^{-\frac{j4\pi K}{5}} = 2\cos\frac{4\pi k}{5}$



$X(0) = 2$

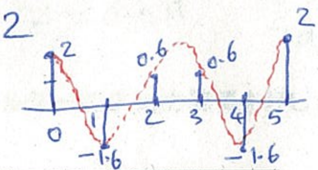
$X(1) = 2\cos\frac{4\pi}{5} = -1.6$

$X(2) = 2\cos\frac{8\pi}{5} = 0.6$

$X(3) = 2\cos\frac{16\pi}{5} = 0.6$

$X(4) = 2\cos\frac{16\pi}{5} = -1.6$

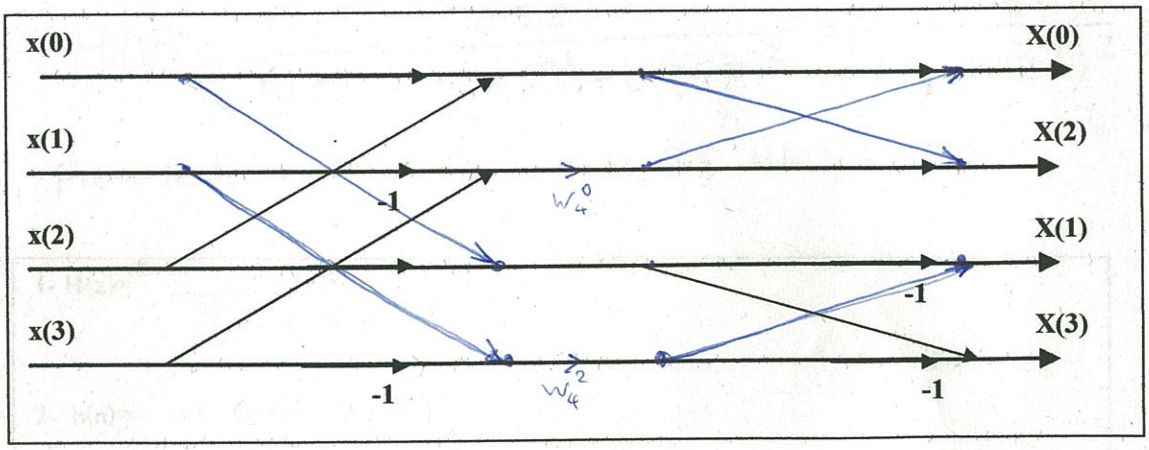
$X(5) = 2\cos 4\pi = 2$



4 points 3 points

X(K)= $2\cos\frac{4\pi k}{5}$ X(0) = 2 X(1)= −1.6 X(2)= 0.6 X(3)= 0.6 X(4)= −1.6 X(5)= 2

***6*—** 4 点 FFT のシグナルフロー図を完成せよ。ただし、入力信号は自然順とする。



7- N=128 点として、DFT と FFT の乗算回数を比較せよ。また、bitreversal 入力で 42 番目にどの入力サンプルが入るか。

$\overbrace{0101010}^{7\,bits}$ $\xrightarrow{\text{bit reversal}}$ $\overbrace{0101010}^{7}$

$32+8+2 = 42$ 　　 $32+8+2 = 42$

$$\frac{FFT}{DFT} = \frac{\frac{N}{2}\log_2 N}{N^2} = \frac{64 \times 7}{128 \times 128} = \frac{7}{256} = 0.027 \qquad x\ (42)$$

7 points 　　 3 points

8- 以下に2次 IIR ディジタルフィルターの差分方程式を表している。フィルタは安定にたる条件 a を求めよ。(T=1)

$$y(n) = x(n) + a\, y(n-1) - 0.25\, a^2 y(n-2)$$

$$Y(z) = X(z) + a z^{-1} Y(z) - 0.25 a^2 z^{-2} Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a z^{-1} + 0.25 a^2 z^{-2}}$$

a $<$ 2

$$1 - a z^{-1} + 0.25 a^2 z^{-2} = 0$$

$$(1 - 0.5 a z^{-1})^2 = 0 \rightarrow 1 - 0.5 a z^{-1} = 0$$

$$z_p^{-1} = \frac{1}{0.5a} \Rightarrow z_p = 0.5a$$

安定のため

$|z_p| < 1$

$|0.5a| < 1$

$|a| < 2$

9- 次の差分方程式は、ある離散時間線形時不変システム(IIR デイジタルフィルター)の入出力関係を表している。

$$y(n) = 0.5\, x(n-1) + y(n-1) - 0.25\, y(n-2)$$

1- ディジタルフィルターの伝達関数 H(z)を求めよ。

2- システムのインパルス応答 h(n)を求めよ。

$$Y(z) = 0.5 z^{-1} X(z) + z^{-1} Y(z) - 0.25 z^{-2} Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.5 z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25 z^{-2}} = \frac{0.5 z^{-1}}{(1 - 0.5 z^{-1})^2}$$

From table in book: $h(n) = n\, 0.5^n\, u(n)$

5 Points

1- $H(z) = \dfrac{0.5 z^{-1}}{(1 - 0.5 z^{-1})^2}$

5 Points

2- $h(n) = n\, 0.5^n\, u(n)$