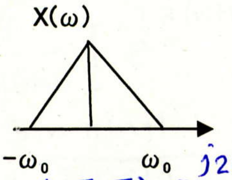
My Solutions
M.R.Asharif
2013/8/2

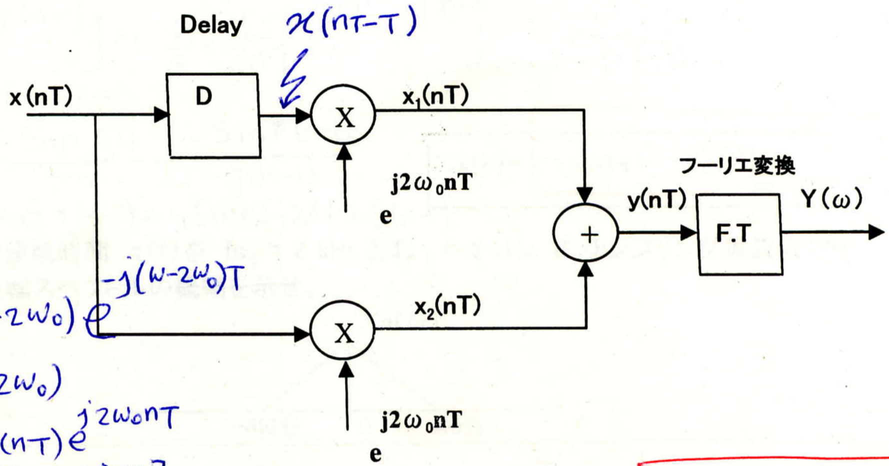
Digital Signal Processing
Undergraduate Course **Student's Name:**
Last-Term Examination **Sudent's No.**
2013.8.2 **(Each problem scored equally)**

University of the Ryukyus
Faculty of Engineering
Dept. of Information Eng.
Prof. M.R. Asharif

~~~~~~

1－ 次の図のような回路がある。x (t)を T でサンプリングして, x (t)のフーリエ変換 X (ω) が図示されている。$X_1(\omega)$ 、$X_2(\omega)$と出力 y(nT) のフーリエ変換 Y(ω)を求めよ。





$x_1(nT) = x(nT-T)\, e^{j2\omega_0 nT}$

$x(nT) \longrightarrow X(\omega)$

$x(nT-T) \longrightarrow X(\omega)\, e^{-j\omega T}$

$x_1(nT) \longrightarrow X_1(\omega) = X(\omega - 2\omega_0)\, e^{-j(\omega-2\omega_0)T}$

$x_2(nT) \longrightarrow X_2(\omega) = X(\omega - 2\omega_0)$

$y(nT) = x(nT-T)\, e^{j2\omega_0 nT} + x(nT)\, e^{j2\omega_0 nT}$

$Y(\omega) = X(\omega - 2\omega_0)\left[1 + e^{-j(\omega-2\omega_0)T}\right]$

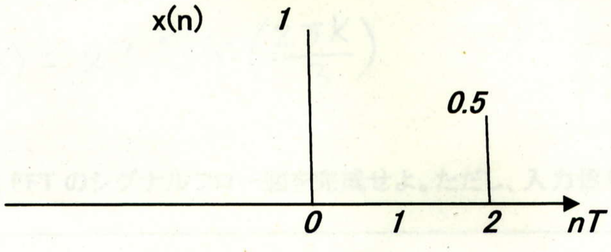
$Y(\omega) = X(\omega-2\omega_0)\, e^{-j\left(\frac{\omega-2\omega_0}{2}\right)T}\left[e^{j\left(\frac{\omega-2\omega_0}{2}\right)T} + e^{-j\left(\frac{\omega-2\omega_0}{2}\right)T}\right] = \boxed{2 X(\omega - 2\omega_0) \cos\left(\frac{\omega-2\omega_0}{2}\right)T \cdot e^{-j\left(\frac{\omega-2\omega_0}{2}\right)T}}$

$X_1(\omega) = X(\omega - 2\omega_0)\, e^{-j(\omega-2\omega_0)T}$

$X_2(\omega) = X(\omega - 2\omega_0)$

$Y(\omega) = \boxed{2}\, X(\omega - \boxed{2\omega_0})\ \cos(\boxed{\frac{\omega-2\omega_0}{2}})\, T\ e^{-j\boxed{\left(\frac{\omega-2\omega_0}{2}\right)T}}$

2－ 次の図に示す離散時間信号 x(n) のフーリエ変換$|X(\omega)|^2$を求めよ。(T=1)



$x(n) = \delta(n) + 0.5\,\delta(n-2)$

$X(\omega) = \sum_{n=0}^{2} x(n)\, e^{-j\omega n} = 1 + 0.5 e^{-j2\omega} = 0.5 + 0.5 + 0.5 e^{-j2\omega}$

$X(\omega) = 0.5 + 0.5 e^{-j\omega}\left(e^{-j\omega} + e^{j\omega}\right) = 0.5 + \cos\omega\, e^{-j\omega} = 0.5 + \cos(\omega)\left[\cos\omega - j\sin\omega\right]$

$X(\omega) = 0.5 + \cos^2\omega - j\cos\omega\sin\omega$

$|X(\omega)|^2 = \left[0.5 + \cos^2\omega\right]^2 + \left(\cos\omega\sin\omega\right)^2$

$|X(\omega)|^2 = 0.25 + \cos^2\omega + \cos^4\omega + \cos^2\omega\sin^2\omega$

$|X(\omega)|^2 = 0.25 + \cos^2\omega + \cos^2\omega(\cos^2\omega + \sin^2\omega)$

$= \boxed{0.5 + 2\cos^2\omega}$

$|X(\omega)|^2 = \boxed{0.25 + 2\cos^2\omega}$

Also:

$\boxed{|X(\omega)|^2 = 1.25 + \cos 2\omega}$
~~~~~~

3- 離散時間信号のフーリエ変換 X(ω)は下記のようになる。時間領域 x(n)をδ関数で求めよ。T=1 とする。

$X(\omega)=4\,\mathrm{Sin}^2(\omega/2)$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}4\sin^2\frac{\omega}{2}\,e^{j\omega n}d\omega=\frac{4}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}{2j}\right]^2e^{j\omega n}d\omega$$

$$x(n)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{j\omega}-2+e^{-j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(n+1)}d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}d\omega-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(n-1)}d\omega$$

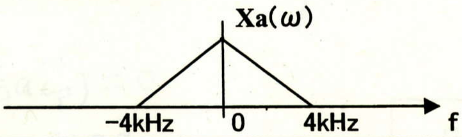
$$x(n)=-\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{j(n+1)}\left[e^{j\pi(n+1)}-e^{-j\pi(n+1)}\right]+\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{jn}\left[e^{j\pi n}-e^{-j\pi n}\right]-\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{j(n-1)}\left[e^{j\pi(n-1)}-e^{-j\pi(n-1)}\right]$$

$$x(n)=-\frac{\sin\pi(n+1)}{\pi(n+1)}+2\frac{\sin\pi n}{\pi n}-\frac{\sin\pi(n-1)}{\pi(n-1)}$$

$$=-\mathrm{Sinc}\,\pi(n+1)+2\mathrm{Sinc}(\pi n)-\mathrm{Sinc}\,\pi(n-1)=-\delta(n+1)+2\delta(n)-\delta(n-1)$$

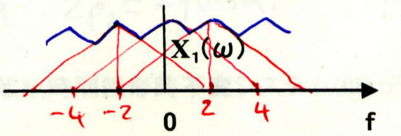
x(n)= $\boxed{-\delta(n+1)+2\delta(n)-\delta(n-1)}$

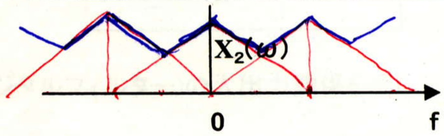
4— 図の振幅スペクトルを持つ連続時間 x(t)を fs_1 = 2 kHz と fs_2 = 4 kHz のサンプリング周波数でサンプリング した。離散時間の振幅スペクトルの概略を示せ。



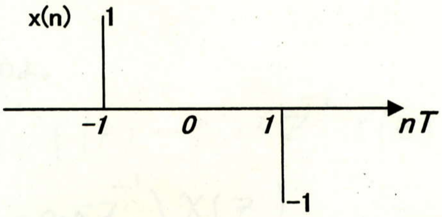
$T_{s1}=\frac{1}{2}=0.5\,\mathrm{msec.}$

$T_{s2}=\frac{1}{4}=0.25\,\mathrm{msec.}$





5- つぎの有限信号 x(n)の DFT, X(k), を求めよ。但し N=3 、T=1 とする。



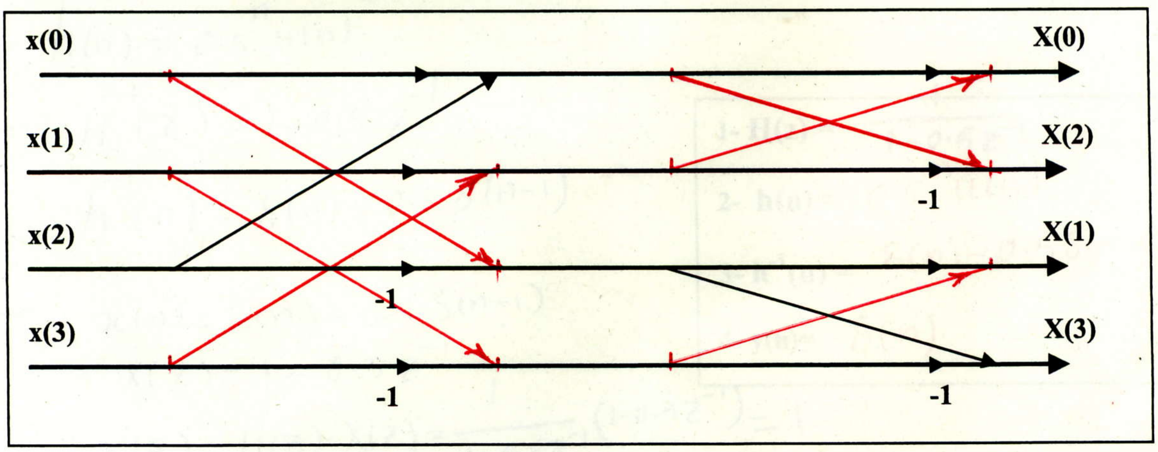
$$X(K)=\sum_{n=-1}^{1}x(n)e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}$$

$$X(K)=e^{\frac{j2\pi k}{3}}-e^{-\frac{j2\pi k}{3}}$$

$$X(K)=2j\,\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$$

$$X(k)=2\boxed{j}\sin\left(\boxed{\frac{2\pi k}{3}}\right)$$

6- 4 点 FFT のシグナルフロー図を完成せよ。ただし、入力信号は自然順とする。



7- N=256 (8 bits)点として、DFT と FFT の乗算回数を比較せよ。また、bit-reversal 入力で 89 (01011001) 番目にどの入力サンプルが入るか。

$(89)_{10} = 01011001 \Longrightarrow$ bit-reversal $10011010 = 2+8+16+128 = 154$

128 64 32 16 8 4 2 1 / 128 16 8 4 2 1

$$\boxed{\frac{\text{DFT}}{\text{FFT}} = \frac{256\times256}{\frac{N}{2}\log_2 N} = \frac{N^2}{128\times8} = 64 \qquad \text{x} \ (154)}$$

8- 以下に 2 次 IIR ディジタルフィルターの差分方程式を表している。フィルタは安定にたる条件 *a,* を求めよ。(T=1)

$$y(n) = x(n) - 0.25\, a^2\, y(n-2)$$

$$Y(z) = X(z) - 0.25a^2 z^{-2} Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+0.25a^2z^{-2}}$$

pole: $1+0.25a^2z_p^{-2} = 0$

$$(1-j0.5az_p^{-1})(1+j0.5az_p^{-1}) = 0$$

$$z_{p_1} = j0.5a, \quad z_{p_2} = -j0.5a$$

$$\begin{cases} |z_{p_1}|<1, & |z_{p_2}|<1 \\ |j0.5a|<1 & |-j0.5a|<1 \\ |a|<2 & |a|<2 \end{cases}$$

$$\boxed{-2 < a < 2}$$

9- 次の差分方程式は、ある離散時間線形時不変システム(IIR デイジタルフィルター)の入出力関係を表している。

$$y(n) = x(n) - 0.5x(n-1) + y(n-1) - 0.25\, y(n-2)$$

1- ディジタルフィルターの伝達関数 *H(z)*を求めよ。
2- システムのインパルス応答 *h(n)*を求めよ。
3-逆システムのインパルス応答 $h(n)^{-1}$を求めよ。
4-入力が $x(n) = \delta(n) - 0.5\delta(n-1)$ の時に出力 *y(n)*を求めよ。

$$Y(z) = X(z) - 0.5z^{-1}X(z) + z^{-1}Y(z) - 0.25z^{-2}Y(z)$$

$$Y(z)[1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}] = (1-0.5z^{-1})X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-0.5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$h(n) = 0.5^n u(n)$$

$$H^{-1}(z) = 1 - 0.5z^{-1}$$

$$h^{-1}(n) = \delta(n) - 0.5\delta(n-1)$$

$$x(n) = \delta(n) - 0.5\delta(n-1)$$

$$X(z) = 1 - 0.5z^{-1}$$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}(1-0.5z^{-1}) = 1$$

$$y(n) = \delta(n)$$

1- $H(z) = \dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$

2- $h(n) = 0.5^n u(n)$

3- $h^{-1}(n) = \delta(n) - 0.5\delta(n-1)$

4- $y(n) = \delta(n)$