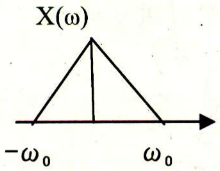
My Solution
M.R. Asharif
2014/7/29

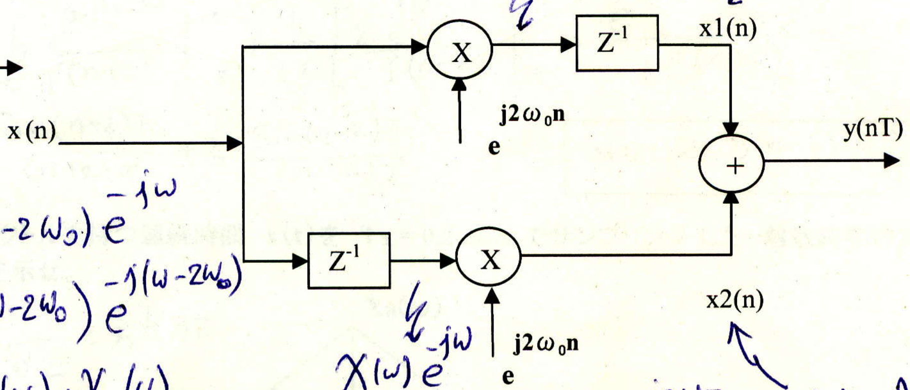
Digital Signal Processing
Undergraduate Course **Student's Name:**
Last-Term Examination **Sudent's No.**
2014.8.1 ***(Each problem scored equally)***

University of the Ryukyus
Faculty of Engineering
Dept. of Information Eng.
Prof. M.R. Asharif

~~~~~~

1− 次の図のような回路がある。x (n)のフーリエ変換 X (ω) が図示されている。$X_1(\omega)$、$X_2(\omega)$と出力 y(n)のフーリエ変換 Y(ω)を求め図示せよ。





$X(\omega-2\omega_0)$

$X_1(\omega) = X(\omega-2\omega_0)e^{-j\omega}$

$X(\omega)e^{-j\omega}$

$X_2(\omega) = X(\omega-2\omega_0)e^{-j(\omega-2\omega_0)}$

$X_1(\omega) = X(\omega-2\omega_0)e^{-j\omega}$

$X_2(\omega) = X(\omega-2\omega_0)e^{-j(\omega-2\omega_0)}$

$Y(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$

$Y(\omega) = X(\omega-2\omega_0)e^{-j\omega} + X(\omega-2\omega_0)e^{-j(\omega-2\omega_0)} = X(\omega-2\omega_0)\left[1+e^{j2\omega_0}\right] \times e^{-j\omega}$

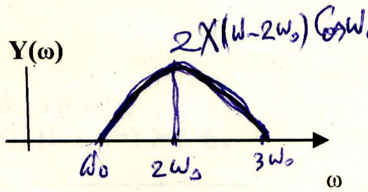
$Y(\omega) = X(\omega-2\omega_0)\left(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0}\right)e^{-j(\omega-\omega_0)}$

$Y(\omega) = 2X(\omega-2\omega_0)\cos\omega_0\, e^{-j(\omega-\omega_0)}$

$X_1(\omega) = X(\omega-2\omega_0)e^{-j\omega}$

$X_2(\omega) = X(\omega-2\omega_0)e^{-j(\omega-2\omega_0)}$

$Y(\omega) = \boxed{2}X(\omega - \boxed{2\omega_0})\cos(\boxed{\omega_0})\, e^{-j\boxed{(\omega-\omega_0)}}$



2− 次の差分方程式に示している Y(ω)を X (ω) で求めよ。(T=1)

$$y(n) = x(n) + 0.25\, y(n-2)$$

$Y(\omega) = X(\omega) + 0.25\,Y(\omega)e^{-j2\omega}$

$Y(\omega) = \dfrac{1}{1-0.25e^{-j2\omega}}X(\omega)$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\boxed{1-0.25e^{-j2\omega}}}X(\omega)$$
~~~~~~

$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \qquad e^{-j\alpha} = \cos\alpha - j\sin\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$

$\sin\alpha = \dfrac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$

$$\frac{\sin(n+M)\pi}{(n+M)\pi} = \delta(n+M)$$

3-離散時間信号のフーリエ変換 X(ω)は下記のようになる。時間領域 x(n)を δ 関数で求めよ。T=1 とする。

X(ω)= 4 Cos (2ω)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 4\cos(2\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 4\left[\frac{e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}}{2}\right] e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} 2 e^{j(n+2)\omega} d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} 2 e^{j(n-2)\omega} d\omega\right]$$

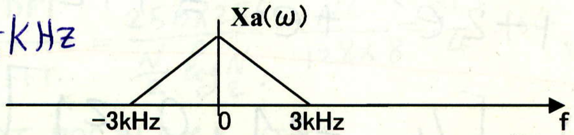
$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2e^{j(n+2)\omega}}{j(n+2)}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2e^{j(n-2)\omega}}{j(n-2)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{j(n+2)\pi} - e^{-j(n+2)\pi}}{j\pi(n+2)} + \frac{e^{j(n-2)\pi} - e^{-j(n-2)\pi}}{j\pi(n-2)}$$

$$x(n) = 2\frac{\sin(n+2)\pi}{(n+2)\pi} + 2\frac{\sin(n-2)\pi}{(n-2)\pi}$$

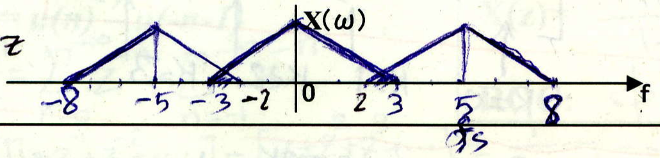
$\boxed{x(n) = 2\delta(n+2) + 2\delta(n-2)}$

4一図の振幅スペクトルを持つ連続時間 x(t)を Ts = 0.2 msec でサンプリング した。離散時間の振幅スペクトルの概略を示せ。

$f_s = \dfrac{1}{T_s} = \dfrac{1}{0.2} = 5\text{KHz}$



$f_s =$ 5 KHz



5-つぎの有限信号 x(n)を h(n)のシステム入力し、出力 y(n)とする。

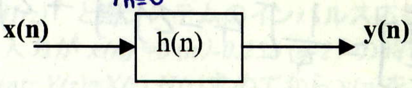
a)たたみ込み y(n)=x(n)*h(n)を求めよ。y(n)=[, , ,]

b)DFT の X(k) , H(k)を求めて、Y(k)=X(k).H(k)から、Y(k)を計算せよ。Y(k)=[, , ,]

c)IDFT の y(n)を Y(k)から求めて、上(a)の y(n)と同じか確認せよ。但し N=4、T=1 とする。

x(n)=[1,1,0,0] , h(n)=[1,1,0,0]

↑n=0 ↑n=0



y(n)=[1 , 2 , 1 , 0]

Y(k)=[4 , -2j , 0 , 2j]

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} \qquad y(n) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} Y(k) e^{j\frac{2\pi nk}{4}}$$

a) $\boxed{y(n) = \sum_{i=0}^{3} x(i) h(n-i)}$

$n=0: y(0) = x(0)h(0) = 1$

$n=1: y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) = 1+1 = 2$

$n=2: y(2) = \cancel{x(0)h(2)} + x(1)h(1) + \cancel{x(2)h(0)} = 1$

$n=3: y(3) = 0$

$y(n) = [1, 2, 1, 0]$

[Continue back page]

Continue...

5 - b) $X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \boxed{1 + e^{-j\frac{2\pi k}{4}}}$

$N=4$

$H(k) = \sum_{n=0}^{3} h(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \boxed{1 + e^{-j\frac{2\pi k}{4}}}$

$Y(k) = X(k) \cdot H(k) = \left(1 + e^{-j\frac{2\pi k}{4}}\right)^2 = \boxed{1 + 2e^{-j\frac{2\pi k}{4}} + e^{-j\pi k}}$

$\boxed{Y(0) = 1+2+1 = 4}$, $\boxed{Y(1) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi} = 1 - 2j - 1 = -2j}$

$\boxed{Y(2) = 1 + 2e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} = 1 - 2 + 1 = 0}$

$\boxed{Y(3) = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + e^{-j3\pi} = 1 + 2j - 1 = 2j}$

$\boxed{Y(4) = 1 + 2e^{-j2\pi} + e^{-j4\pi} = 1+2+1 = 4} = \boxed{Y(0)}$

$$\boxed{Y(k) = [\underset{\uparrow\, k=0}{4}, \underset{\uparrow\, k=1}{-2j}, \underset{\uparrow\, k=2}{0}, \underset{\uparrow\, k=3}{2j}]}$$

c) $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{3} Y(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N}} = \boxed{\frac{1}{4}\left[4 - 2j e^{j\frac{2\pi n}{4}} + 2j e^{j\frac{3\pi n}{2}}\right]}$

$N=4$

$\boxed{y(0) = \frac{1}{4}[4 - 2j + 2j] = 1}$

$\boxed{y(1) = \frac{1}{4}[4 - 2j e^{j\frac{\pi}{2}} + 2j e^{j\frac{3\pi}{2}}]} = \frac{1}{4}[4 - 2j \times j + 2j(-j)]$

$\boxed{y(1) = \frac{1}{4}[4 + 2 + 2] = 2}$

$\boxed{y(2) = \frac{1}{4}[4 - 2j e^{j\pi} + 2j e^{j3\pi}]} = \frac{1}{4}[4 \cancel{- 2j(-1) + 2j(-1)}] = \boxed{1}$

$\boxed{y(4) = \frac{1}{4}[4 - 2j e^{j2\pi} + 2j e^{j6\pi}]} = \frac{1}{4}[4 \cancel{- 2j \times 1 + 2j \times 1}] = \boxed{1 = y(0)}$

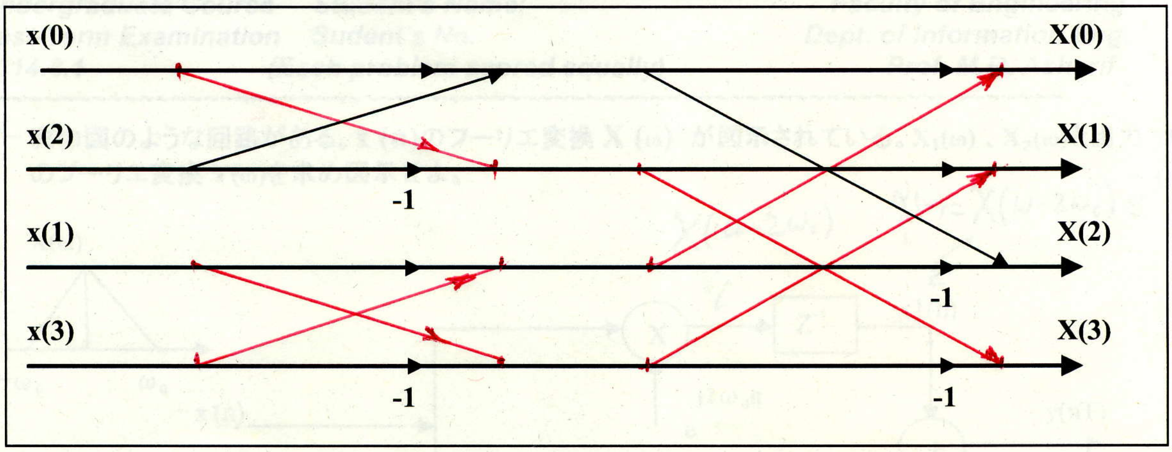
$\boxed{y(3) = \frac{1}{4}[4 - 2j e^{j\frac{3\pi}{2}} + 2j e^{j\frac{9\pi}{2}}]} = \frac{1}{4}[4 - 2j(-j) + 2j(j)] = \boxed{0}$

$\cancel{4 - 2 - 2}$

$$\boxed{y(n) = [\underset{\uparrow\, n=0}{1}, \underset{\uparrow\, n=1}{2}, \underset{\uparrow\, n=2}{1}, \underset{\uparrow\, n=3}{0}]}$$ = Same as in (a)

$y(n) = [\underset{\uparrow\, n=0}{1}, 2, 1, 0]$

6− 4 点 FFT のシグナルフロー図を完成させよ。ただし、入力信号は bit-reversed 順とする。



7− N=256 (8 bits)点として、DFT と FFT の乗算回数を比較せよ。また、bit-reversal 入力で 189 (10111101) 番目にどの入力サンプルが入るか。

$10111101 = 128+32+16+8+4+1 = 189$

$\Downarrow$

bit-Reversal $10111101 = 189$

$$\frac{\textbf{DFT}}{\textbf{FFT}} = \frac{256\times 256}{\frac{N}{2}\log_2 N} = \frac{N^2}{128\times 8} = \frac{256}{4} = 64 \qquad x(10111101) = 189$$

8− 以下の x(n)の Z 変換を求めて、ROC をしらべよ。（T=1 ）

$$x(n) = u(n) - u(-n-1)$$

X(z)= $\dfrac{2}{1-z^{-1}}$

ROC: ϕ No Convergence

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n} = \underbrace{[1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots]}_{ROC_1\ |z^{-1}|<1,\ |z|>1} - \underbrace{[z+z^2+z^3+\cdots]}_{ROC_2\ |z|<1} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{2}{1-z^{-1}}$$

$ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = \phi$

9− 次の差分方程式は、ある離散時間線形時不変システム(IIR デイジタルフィルター)の入出力関係を表している。$y(n) = x(n) + 0.25\, y(n-2)$

1- ディジタルフィルターの伝達関数 $H(z)$ を求めよ。
2- システムのインパルス応答 $h(n)$を求めよ。
3- $H(z)^{-1}$ と逆システムのインパルス応答 $h(n)^{-1}$を求めよ。
4- 入力が $x(n) = \delta(n) - 0.25\delta(n-2)$ の時に出力 $y(n)$を求めよ。
Hint: $Y(z)=X(z).H(z)$求めてから y(n)を求めよ。

1- H(z) = $\dfrac{1}{1-0.25z^{-2}}$

2- h(n)= $[0.5(0.5)^n + 0.5(-0.5)^n]u(n)$

3- $h^{-1}(n)$ = $\delta(n) - 0.25\,\delta(n-2)$

4- y(n)= $\delta(n)$

1) $Y(z) = X(z) + 0.25 z^{-2} Y(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{\frac{1}{1-0.25z^{-2}}}$$

2) $$H(z) = \frac{1}{1-0.25z^{-2}} = \frac{A_1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{A_2}{1+0.5z^{-1}} = \frac{0.5}{1-0.5z^{-1}} + \frac{0.5}{1+0.5z^{-1}}$$

$$A_1 = (1-0.5z^{-1})\cdot H(z)\Big|_{z=0.5,\ z^{-1}=2} = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$A_2 = (1+0.5z^{-1})H(z)\Big|_{z=-0.5,\ z^{-1}=-2} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=-2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\boxed{h(n) = [0.5(0.5)^n + 0.5(-0.5)^n]u(n)}$$

3) $H^{-1}(z) = 1 - 0.25z^{-2} \Longrightarrow \boxed{h^{-1}(n) = \delta(n) - 0.25\,\delta(n-2)}$

4) $x(n) = \delta(n) - 0.25\,\delta(n-2) \Longrightarrow X(z) = 1 - 0.25z^{-2}$

$Y(z) = X(z)\cdot H(z)$

$$Y(z) = \frac{1-0.25z^{-2}}{1-0.25z^{-2}} = 1$$

$$\boxed{y(n) = \delta(n)}$$