

割当て問題への欲張り法の適用

割当て問題（復習）（20分）

4人の院生 A,B,C,D が、英語、数学、物理、化学の試験問題作成を分担する。4人はそれぞれ専門が違うので、次表のように問題作成に作業時間が必要である。

| | 英語 | 数学 | 物理 | 化学 |
|---|----|----|----|----|
| A | 6 | 1 | 9 | 3 |
| B | 2 | 5 | 7 | 8 |
| C | 6 | 3 | 5 | 4 |
| D | 3 | 5 | 2 | 1 |

- (1)このとき、4人の総作業時間を最小にするには、誰がどの科目を担当すればよいか？ この問題を定式化しなさい。
- (2)割当て問題を解き、最小作業時間はいくらになるか求めよ。

解答

$X_{ij}=1$: 院生 i が科目 j を担当する ($i=1,2,3,4 ; j=1,2,3,4$)

$X_{ij}=0$: 院生 i が科目 j を担当しない ($i=1,2,3,4 ; j=1,2,3,4$)

とする。16 個の決定変数になるので、これらの関係を表現すればよい。

まず、院生 i は1つの科目のみ担当するため、

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=1$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=1$$

$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}=1$$

$$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}=1$$

を満たさねばならない。これらをまとめると $\sum_{j=1}^4 X_{ij} = 1 \quad (i=1,2,3,4)$

逆に科目 j からみると、科目 j は院生 i が担当するので、

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}=1$$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}=1$$

$$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}=1$$

$$X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}=1$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^4 X_{ij} = 1 \quad (j=1,2,3,4)$$

目的関数 Z は作業時間の総和なので、

$$\begin{aligned} Z = & 6X_{11}+1X_{12}+9X_{13}+3X_{14}+ \\ & 2X_{21}+5X_{22}+7X_{23}+8X_{24}+ \\ & 6X_{31}+3X_{32}+5X_{33}+4X_{34}+ \\ & 3X_{41}+5X_{42}+2X_{43}+1X_{44} \end{aligned}$$

となる。以上をまとめると、

Min $Z = 6X_{11}+1X_{12}+9X_{13}+3X_{14}+2X_{21}+5X_{22}+7X_{23}+8X_{24}+$
 $6X_{31}+3X_{32}+5X_{33}+4X_{34}+3X_{41}+5X_{42}+2X_{43}+1X_{44}$

Sub.to

$$\sum_{j=1}^4 X_{ij} = 1 \quad (i=1,2,3,4)$$

$$\sum_{i=1}^4 X_{ij} = 1 \quad (j=1,2,3,4)$$

$$X_{ij} \in \{0,1\} \quad (i=1,2,\dots,4; j=1,2,\dots,4)$$

また、このときの解 X は

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この解は A : 数学、B : 英語、C : 物理、D : 化学を担当することを意味する。
このとき、作業時間は9になる。

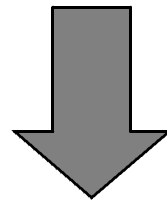
割当て問題へ欲張り法を応用（考え方）

（考え方）

A,B,C,D がそれぞれ担当する科目の作業時間の合計が最小になるようにするのが目的。

（例）（A = 英語、B = 数学、C = 物理、D = 化学）

このとき作業時間 = 17



できるだけ短い作業時間になる院生と科目の組合せを1つずつ評価し、短い作業時間の組合せを優先して採用していく方針で解を作ればよい。（院生と科目の組合せが1つの部分問題となる。）

割当て問題への応用（解答手順）

| | 英語 | 数学 | 物理 | 化学 |
|---|----|----|----|----|
| A | 6 | 1 | 9 | 3 |
| B | 2 | 5 | 7 | 8 |
| C | 6 | 3 | 5 | 4 |
| D | 3 | 5 | 2 | 1 |

- 1) 上記の表が与えられているので、このなかで作業時間最小の組合せを探すと、
(A,数学)=1、(D,化学)=1 が最小である（下記の赤字）。従ってこの2組を選ぶ。

| | 英語 | 数学 | 物理 | 化学 |
|---|----|----|----|----|
| A | 6 | 1 | 9 | 3 |
| B | 2 | 5 | 7 | 8 |
| C | 6 | 3 | 5 | 4 |
| D | 3 | 5 | 2 | 1 |

2) (A,数学)、(D,化学)の2組を既に選んだので、A,D と数学、化学を除去する。

| | 英語 | 数学 | 物理 | 化学 |
|---|----|----|----|----|
| A | 6 | 1 | 9 | 3 |
| B | 2 | 5 | 7 | 8 |
| C | 6 | 3 | 5 | 4 |
| D | 3 | 5 | 2 | 1 |

3) 残ったのは下記の青字の部分なので、このなかで作業時間最小の組合せを探すと、(B,英語)=2、(C,物理)=5 が最小である。従って、この2組を最後に選ぶ。

| | 英語 | 数学 | 物理 | 化学 |
|---|----|----|----|----|
| A | 6 | 1 | 9 | 3 |
| B | 2 | 5 | 7 | 8 |
| C | 6 | 3 | 5 | 4 |
| D | 3 | 5 | 2 | 1 |

4) 上記の欲張り法による選択の結果、(A, 数学)、(D, 化学)、(B, 英語)、(C, 物理)の組合せが完成する。従って、このときの作業時間合計は9であり、これらは最適解と一致する。

欲張り法によって、上記の割り当て問題の最適解を簡単に得ることができた。しかし、一般には最適解が得られる保証はなく、準最適解が得られることに注意。

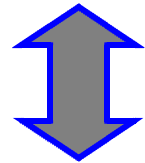
また、適用する問題に合わせて欲張り法の具体的計算手順を考える必要がある。(= 問題の定式化と同じ)

局所探索法 (Local Search Method) とは？

【組合せ最適化問題の解法】

列挙法 (分枝限定法, 整数計画法, 総当たり法)

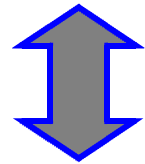
厳密解を求解可能。解法が少し複雑。時間長い。



局所探索法 (近傍探索法, 局所探索法, 遺伝的アルゴリズム)

列挙法と発見的手法の中間。

限られた計算時間で比較的良い解を求める。



発見的方法 (欲張り法 (Greedy Method), 吝嗇法 (Stingy Method))

準最適解を求解可能。解法簡単。時間短い。

近傍探索法

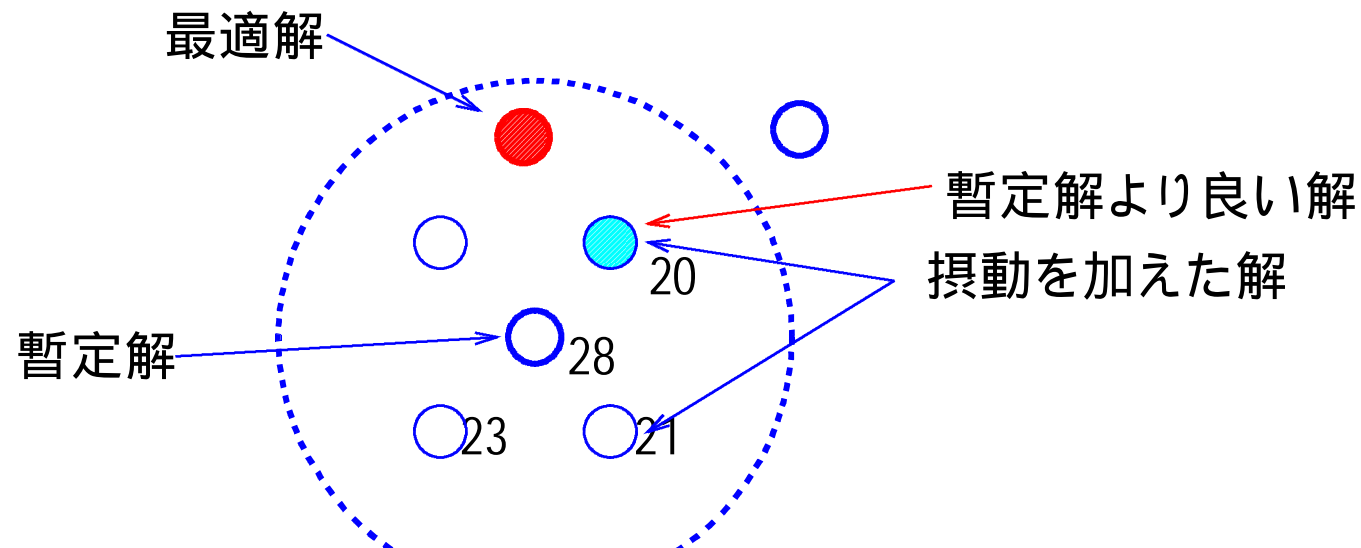
なんらかの方法で得られた暫定解（可能解） X に摂動(=なんらかの処理)を加えて得られる解の集合を X の近傍 (Neighborhood) と定義し、 $N(X)$ と表す。

近傍 $N(X)$ 内の個々の解を近傍解と呼ぶ。

ここで、近傍 $N(X)$ 内の解に目的関数値を改善できる解 があれば、

を新しい暫定解とする方法を近傍探索法 (Neighborhood Search) と呼ぶ。

どのような摂動 (perturbation) を使用するかは、問題に合わせて適宜設計する。



(例題) 上記割当て問題において英語=1、数学=2、物理=3、化学=4 で表す。

このときの一つの可能解 X が $(A,B,C,D)=(3,4,1,2)$ である場合、近傍探索法を適用すると、どうなるか？

1) 「隣り合う要素を入れ替える」という処理を「摂動」と定義する。

2) $X=(3,4,1,2)$ の先頭の要素から摂動を加えると、3つの結果(近傍解)が得られる。

3 と 4 を入れ替える $X_1 = (4,3,1,2)$

4 と 1 を入れ替える $X_2 = (3,1,4,2)$

1 と 2 を入れ替える $X_3 = (3,4,2,1)$

このときの目的関数値は $f(X)=28$ に対して、 $f(X_1)=21$, $f(X_2)=20$, $f(X_3)=23$ となる。

3) $f(X_2)=20$ が最も良いので、 X_2 が新しい暫定解となる。

すなわち $X_2 = (3,1,4,2)$ (B:英語、D:数学、A:物理、C:化学) で作業時間 20

局所探索法

局所探索法 近傍探索法を繰り返し適用する方法。

(計算手順)

- 1) 初期解 X を作る。これを暫定解とする。
- 2) 解 X に摂動を加えて近傍 $N(X)$ を生成する。
- 3) 近傍 $N(X)$ に $F(X) > f(y)$ となる近傍解 $y (y \in N(X))$ が存在すれば、 y を新しい暫定解として2)へ進む。
- 4) 近傍 $N(X)$ に $F(X) > f(y)$ となる近傍解 $y (y \in N(X))$ が存在しなければ現在の暫定解を(準)最適解として終了。

上記で得られる(準)最適解は、その近傍 $N(X)$ において最も良い解であるという意味で**局所的最適解 (Local Optimal Solution)**と呼ぶ。一方、分枝限定法など列挙法で得られる最適解は、**大域的最適解 (Global Optimal Solution)**と呼ぶ。

(練習問題)

上記の割当て問題において英語=1、数学=2、物理=3、化学=4 で表す。

このときの一つの可能解 X が $(A,B,C,D)=(3,4,1,2)$ である場合、近傍探索法を適用すると、どうなるか？

- 1) 「下記のように、数字を1つ隣に rotate する」という処理を「摂動」と定義して適用するとどうなるか？

(1 2 , 2 3 , 3 4 , 4 1)

- 2) 「下記のように、数字を2つ隣に rotate する」という処理を「摂動」と定義して適用するとどうなるか？

(1 3 , 2 4 , 3 1 , 4 2)

- 3) 1)および2)よりも良い解を得られるような「摂動」を考えて適用しなさい。