

数理計画と最適化

本日の内容

- 1．最適化問題にはどのようなものがあるか？
- 2．重要な例題の説明・定式化

数理計画・最適化問題の代表的例題

- **最短距離問題**

N個の配達先を最短距離（or 最短時間）で回るルートを見つける．

- **生産問題・輸送問題・配置問題**

設備を最も効率的に動かすためには，原料や部品，人員をどう配置すればよいか？

- **ナップザック問題**

1つのナップザックに価格の異なるN種類の部品を詰め込むとき，最も価格が高くなるようにするにはどうすればよいか？

例題の考え方を応用する！

(復習) 基本的な最適化問題を、
高校までに習った方法で解いてみよう!

(例)

<制約条件>

$$-2x_1 + x_2 \quad 1 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

$$x_1 \quad 2 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

$$x_1 + x_2 \quad 3 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

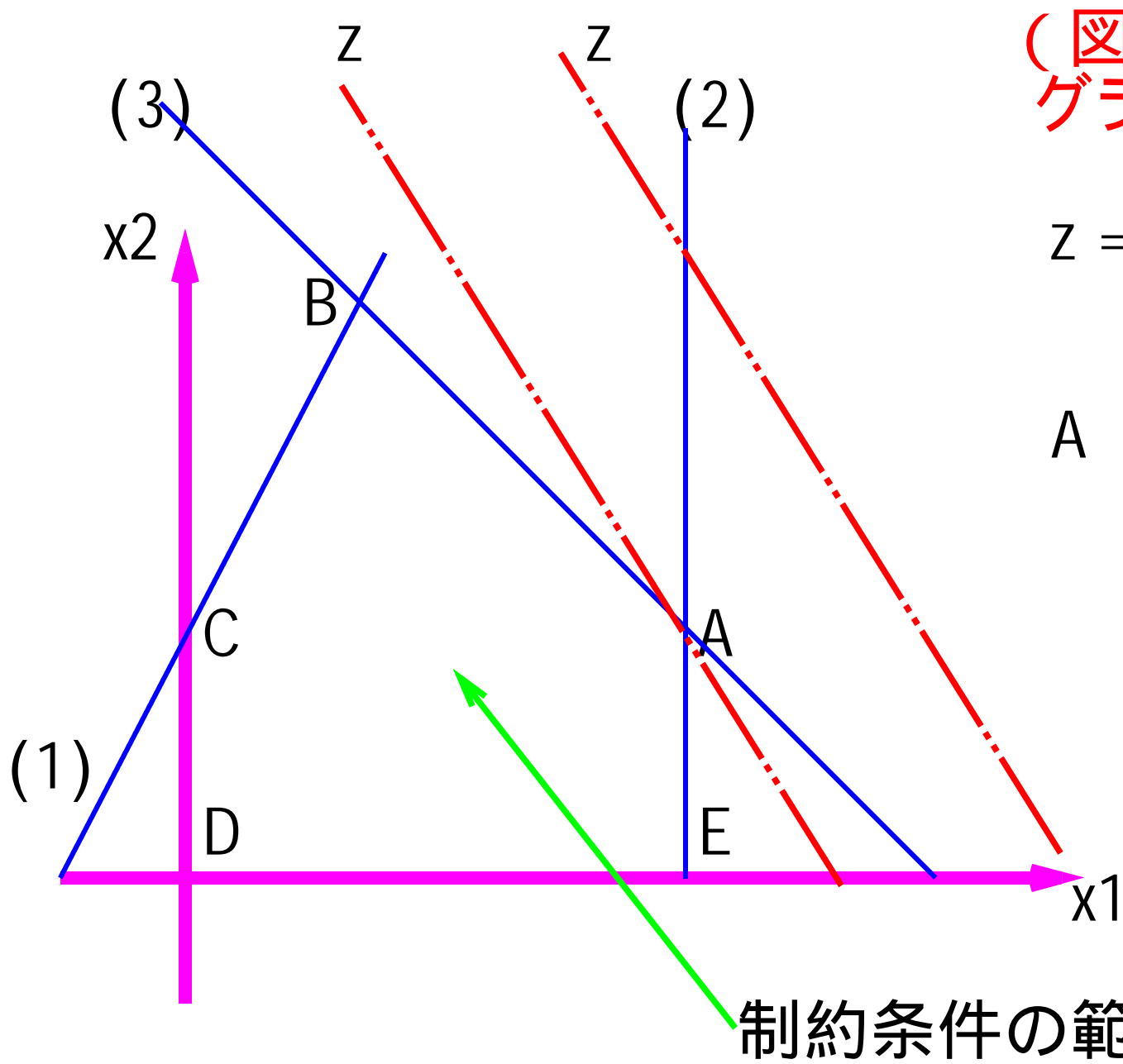
$$x_1, x_2 \quad 0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

<目的関数>

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

最大化

zを最大にするような変数 x_1, x_2 を決める。



(図的解法)
グラフで考える。

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

A のときに最大。

制約条件の範囲

輸送問題

- 1) ある会社では製品を1種類ずつ保管する倉庫を3つ保有しており、5つの支店に製品を輸送している。各倉庫の保有量は a_i とする。
- 2) 支店 j での1週間当たりの需要を b_j とし、倉庫 i から支店 j への輸送費用を製品1種類当たり C_{ij} とする。
- 3) 1週間の総輸送費用を最小にするように各倉庫から各支店への輸送量 x_{ij} を求めなさい。

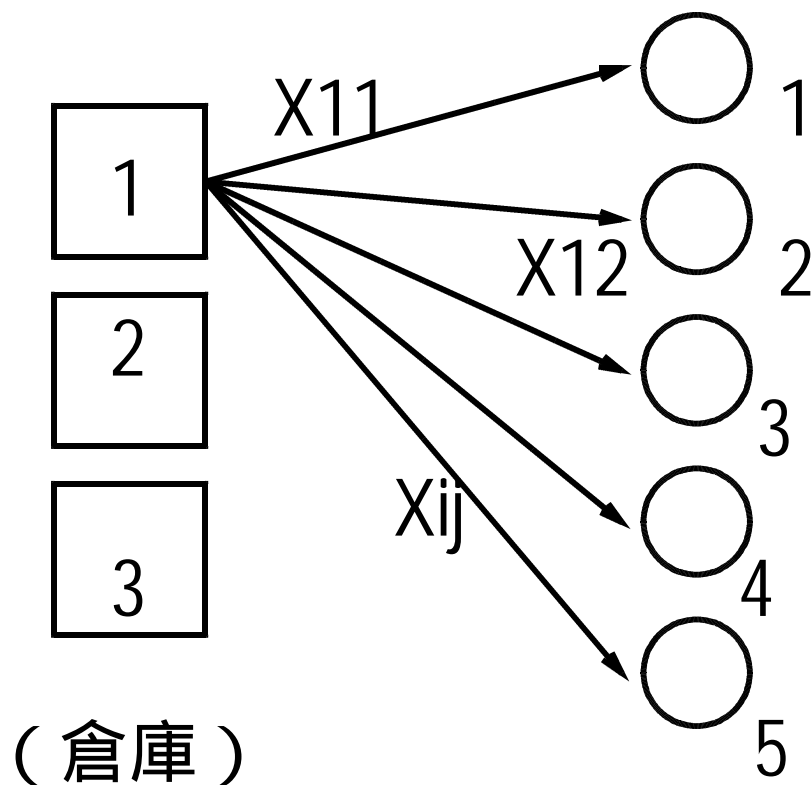
応用範囲の広い重要な最適化問題

(例)

- ・サーバ クライアント間の最適なデータ配送方法は?
- ・県内の全コンビニへ最小時間で商品を配送するには?
- ・発電所から家庭への効率的な配電方法は?

輸送問題（具体例）

3カ所の倉庫から5カ所の工場へ原油を配送する。倉庫1,2,3から出荷できる原油の量はそれぞれ1ヶ月あたり a_i ($i=1,2,3$)である。工場 j での1ヶ月あたり使用量を b_j ($j=1,2,3,4,5$)とする。倉庫 i から工場 j までの輸送費用は原油1ガロンあたり C_{ij} とする。1ヶ月あたりの輸送費用を最小するように倉庫から工場への原油輸送量を決定しなさい。



倉庫 i から工場 j の輸送量を X_{ij} とする。

輸送問題の定式化

$$\min Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 C_{ij} X_{ij}$$

輸送総費用の定義

subject to

$$\sum_{j=1}^5 X_{ij} = a_i, \quad i=1,2,3$$

出荷量に関する制約

$$\sum_{i=1}^3 X_{ij} = b_j, \quad j=1,2,3,4,5$$

消費量に関する制約

$$X_{ij} \geq 0, \quad (i=1,2,3, \quad j=1,2,3,4,5)$$

輸送量は0以上

ナップサック問題

いくつかの荷物と一定容量まで荷物を入れられる袋がある。各荷物の容量と価格が定められているとき、荷物の総価格が最大になるように袋へ詰めるにはどうすれば良いか

- 倉庫内で荷物を最も多く収納できる整理方法
- 最小面積の LSI を作るための IC 群配置方法は？
- 駐車場の駐車区画の割り振り
- ノアの箱船の動物部屋の建築区画割り振り
-

ナップサック問題

いくつかの荷物と一定容量まで荷物を入れられる袋がある．各荷物の容量と価格が定められているとき，荷物の総価格が最大になるように袋へ詰めるにはどうすれば良いか

<定式化> 袋の容量を B .

全部で N 個の荷物 .

荷物 i の容量を A_i , 価格を C_i

荷物 i を袋に入れることを $X_i=1$, 入れないことを $X_i=0$

$$\max \sum_{i=1}^N C_i \cdot X_i$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^N A_i \cdot X_i \leq B, X_i \in \{0,1\} \quad (i=1, \dots, N)$$

ナップサック問題（数値例）

8 荷物（ $N = 8$ ）の場合．

荷物 i	1	2	3	4	5	6	7	8	B
容量 A_i	3	6	5	4	8	5	3	4	25
価格 C_i	7	12	9	7	13	8	4	5	

解は， $X = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ であり，このとき荷物 1，2，3，5，7 を袋に入れることを表す．