★線形計画問題と定式化の拡張(2010/5/12)

・線形計画問題の標準形（シンプレクス法の準備）

→　任意の線形計画問題は標準形
に変換できる．

・線形計画問題の計算可能性

→　有限回の計算で求解可能で
あることを保証する．

→　線形計画法の強力な利点．
現実問題への実用性・応用性
を保証．

★標準形

制約条件：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \quad \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{array}\right\}$$

非負条件：$X_j \geqq 0 \quad j = 1,2,\cdots,n$

目的関数：$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$

→　最小化

費用係数　　右辺定数

★標準形の行列表現

→　計算のためには行列表現が良い！

$$C = (C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{minimize} & Z = CX \\ \text{subject to} & AX = B,\ X \geqq 0 \end{array}}$$

制約式は等号！！

★標準形への変換法

1） 制約式が不等式の場合

→　スラック変数(slack variable) X_{n+i} を使用

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leqq b_1$$
$$\downarrow$$
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + X_{n+i} = b_1$$

→　余裕変数(surplus variable) X_{n+i} を使用

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \geqq b_1$$
$$\downarrow$$
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n - X_{n+i} = b_1$$

★標準形への変換法

2） 変数 X_k が非負という条件がない場合：

→ X_k を2つの非負の変数の差で置き換える．

$$\boxed{X_k = X_k' - X_k'',\quad X_k' \geqq 0 \quad X_k'' \geqq 0}$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leqq b_1$$

$$\downarrow$$

$$a_{11}(X_1' - X_1'') + a_{12}(X_2' - X_2'') + \cdots + a_{1n}(X_n' - X_n'') \leqq b_1$$

変数の個数は増えるが，変数が非負であるという条件の方がメリット大である．

★標準形への変換法

3）目的関数が最大化問題の場合：

→目的関数に -1 を乗じて最小化問題に変換

★生産計画問題（例）を標準形変換してみよう

Maxmize　$Z = 2.5X_1 + 5X_2 + 3.4X_3$

Subject to

$$2X_1 + 10X_2 + 4X_3 \leqq 425$$
$$6X_1 + 5X_2 + 8X_3 \leqq 400$$
$$7X_1 + 10X_2 + 8X_3 \leqq 425$$
$$X_1\ X_2\ X_3 \geqq 0$$

?

★生産計画問題（例）を標準形変換

Maxmize $Z = 2.5X_1 + 5X_2 + 3.4X_3$

Subject to

$$2X_1 + 10X_2 + 4X_3 \leqq 425$$
$$6X_1 + 5X_2 + 8X_3 \leqq 400$$
$$7X_1 + 10X_2 + 8X_3 \leqq 425$$
$$X_1\ X_2\ X_3 \geqq 0$$

Minimize $Z = -\!-2.5X_1 -\!- 5X_2 -\!- 3.4X_3$

Subject to

$$2X_1 + 10X_2 + 4X_3 + X_4 = 425$$
$$6X_1 + 5X_2 + 8X_3 + X_5 = 400$$
$$7X_1 + 10X_2 + 8X_3 + X_6 = 425$$
$$X_1\ X_2\ X_3\ X_4\ X_5\ X_6 \geqq 0$$

★行列形式ではどうなるか？

行列表現　→　minimize $Z = CX$
subject to $AX = B,\ X \geqq 0$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix},\quad X=(X_1\ X_2\ X_3)$$

$$B=(425,400,600)$$

スラック変数部分

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 10 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad X=(X_1\ X_2\ X_3\ X_4\ X_5\ X_6)$$

$$B=(425,400,600)$$

★線形計画法の基本定理

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

変数Ｘの数

式の数

制約条件の係数行列Ａにおいて，
n>m, rank(A)=m が成立するときには，
制約条件の等式は線形独立で解が無数にある

→多数の解のうちから，まず制約条件を
満たす解かどうかを調べた後で目的関数
を最小にするものを探す．

★宿題（次回の講義終了までに pdf で送信すること）

（課題）下記の５つの用語について調査し、その意味を記述しなさい。

実行可能解：

基底行列：

基底解：

実行可能基底解：

最適解：