



FFT設計(2)

ファイヤー和田 知久

wada@ie.u-ryukyu.ac.jp

琉球大学・工学部・情報工学科 教授

<http://www.ie.u-ryukyu.ac.jp/~wada>

FFT演算 (復習)

- ここでは式をTwiddle Factor W_N を用いて変形しています。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$$

twiddle Factor!

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

前回、このTWIDDLEを計算する(表を引くだけ)回路を設計してもらいました!

RADIX-4 64点FFTアーキテクチャ

- 変数 n 、 k を以下のように変換すると、
3重の の式に変形できる。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{63} x(n) \cdot W_{64}^{nk}$$

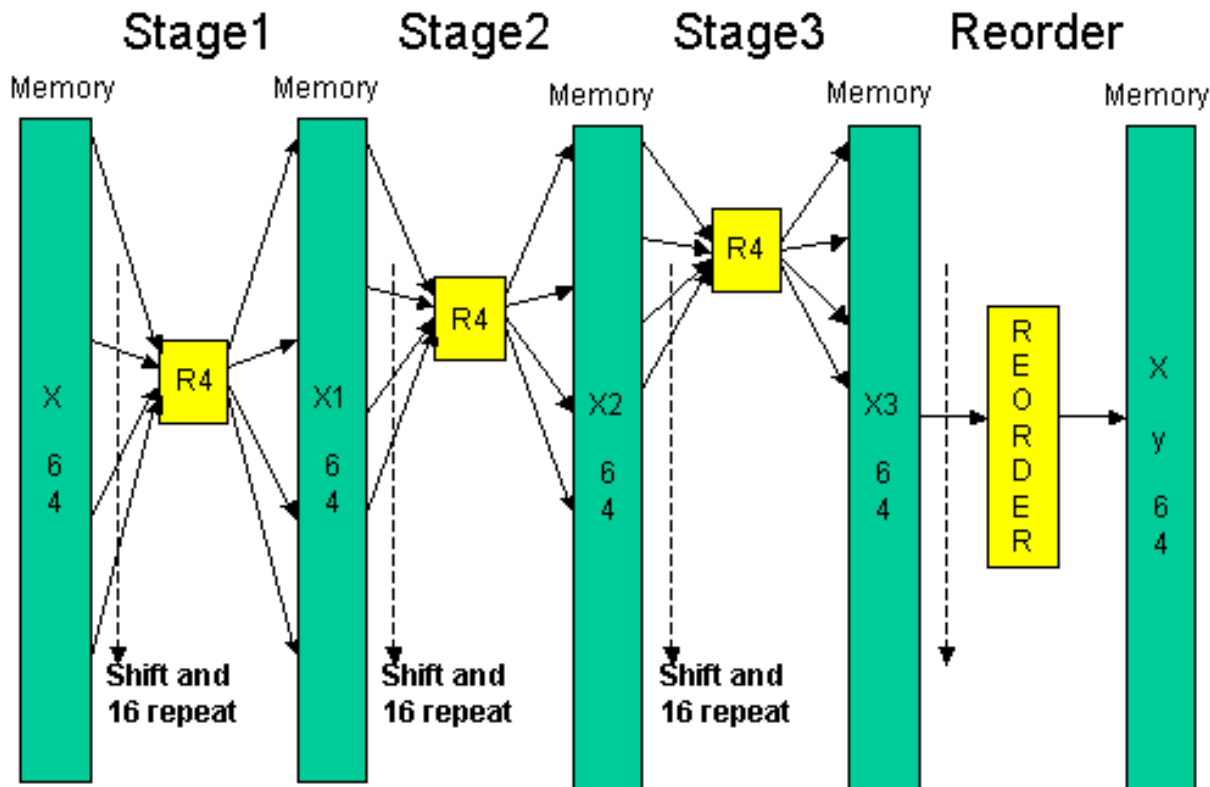
$$k = k_0 + 4k_1 + 16k_2 \quad (k_0, k_1, k_2 = 0 \cdots 3)$$

$$n = n_0 + 4n_1 + 16n_2 \quad (n_0, n_1, n_2 = 0 \cdots 3)$$

$$X(k) = \sum_{n_0=0}^3 \sum_{n_1=0}^3 \sum_{n_2=0}^3 x(n_0 + 4n_1 + 16n_2) W_{64}^{(n_0 + 4n_1 + 16n_2)(k_0 + 4k_1 + 16k_2)}$$

RADIX-4 64FFTアーキテクチャ

- 各 を計算することにより、以下のような4段階の処理で実現できます。



STAGE1 (1)

- 前頁で n_2 に関する を展開する。
- ただし
 $(W_N)^0=1, (W_N)^{1N/4}=-j, (W_N)^{2N/4}=-1, (W_N)^{3N/4}=j$ なる性質を利用する。

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n_0=0}^3 \sum_{n_1=0}^3 \left\{ \begin{array}{l} x(n_0 + 4n_1)W_{64}^{(n_0+4n_1)(k_0+4k_1+16k_2)} \\ + x(n_0 + 4n_1 + 16)W_{64}^{(n_0+4n_1+16)(k_0+4k_1+16k_2)} \\ + x(n_0 + 4n_1 + 32)W_{64}^{(n_0+4n_1+32)(k_0+4k_1+16k_2)} \\ + x(n_0 + 4n_1 + 48)W_{64}^{(n_0+4n_1+48)(k_0+4k_1+16k_2)} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{n_0=0}^3 \sum_{n_1=0}^3 \left\{ \begin{array}{l} x(n_0 + 4n_1) \\ + (-j)^{k_0} x(n_0 + 4n_1 + 16) \\ + (-1)^{k_0} x(n_0 + 4n_1 + 32) \\ + (j)^{k_0} x(n_0 + 4n_1 + 48) \end{array} \right\} W_{64}^{k_0(n_0+4n_1)} W_{16}^{(n_0+4n_1)(k_1+4k_2)}
 \end{aligned}$$

STAGE1 (2)

- 以下のようにx1なる中間信号を設けると以下のように式を変形することができる。

$$x1(n_0 + 4n_1 + 16k_0) = \begin{pmatrix} x(n_0 + 4n_1) \\ + (-j)^{k_0} x(n_0 + 4n_1 + 16) \\ + (-1)^{k_0} x(n_0 + 4n_1 + 32) \\ + (j)^{k_0} x(n_0 + 4n_1 + 48) \end{pmatrix} W_{64}^{k_0(n_0 + 4n_1)}$$

$$X(k) = \sum_{n_0=0}^3 \sum_{n_1=0}^3 x1(n_0 + 4n_1 + 16k_0) W_{16}^{(n_0 + 4n_1)(k_1 + 4k_2)}$$

STAGE2

- STAGE2では、
- x_1 信号より、 x_2 を計算する中間式を導入することができる。

$$X(k) = \sum_{n_0=0}^3 \sum_{n_1=0}^3 x_1(n_0 + 4n_1 + 16k_0) W_{16}^{(n_0+4n_1)(k_1+4k_2)}$$

$$= \sum_{n_0=0}^3 \left\{ \begin{array}{l} x_1(n_0 + 0 + 16k_0) W_{16}^{(n_0+0)(k_1+4k_2)} \\ + x_1(n_0 + 4 + 16k_0) W_{16}^{(n_0+4)(k_1+4k_2)} \\ + x_1(n_0 + 8 + 16k_0) W_{16}^{(n_0+8)(k_1+4k_2)} \\ + x_1(n_0 + 12 + 16k_0) W_{16}^{(n_0+12)(k_1+4k_2)} \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{n_0=0}^3 \left\{ \begin{array}{l} x_1(n_0 + 0 + 16k_0) \\ + (-j)^{k_1} x_1(n_0 + 4 + 16k_0) \\ + (-1)^{k_1} x_1(n_0 + 8 + 16k_0) \\ + (j)^{k_1} x_1(n_0 + 12 + 16k_0) \end{array} \right\} W_{16}^{k_1 n_0} \left. \right\} W_4^{n_0 k_2}$$

$$x_2(n_0 + 4k_1 + 16k_0) = \left\{ \begin{array}{l} x_1(n_0 + 0 + 16k_0) \\ + (-j)^{k_1} x_1(n_0 + 4 + 16k_0) \\ + (-1)^{k_1} x_1(n_0 + 8 + 16k_0) \\ + (j)^{k_1} x_1(n_0 + 12 + 16k_0) \end{array} \right\} W_{16}^{k_1 n_0}$$

$$X(k) = \sum_{n_0=0}^3 x_2(n_0 + 4k_1 + 16k_0) W_4^{n_0 k_2}$$

STAGE3

- 同様に、 x_2 から x_3 を計算する中間式を導入することができる。
- これは実は4FFTと同じ式となる

$$\begin{aligned} x_3(k_2 + 4k_1 + 16k_0) &= \sum_{n_0=0}^3 x_2(n_0 + 4k_1 + 16k_0) W_4^{n_0 k_2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x_2(0 + 4k_1 + 16k_0) \\ + x_2(1 + 4k_1 + 16k_0) W_4^{k_2} \\ + x_2(2 + 4k_1 + 16k_0) W_4^{2k_2} \\ + x_2(3 + 4k_1 + 16k_0) W_4^{3k_2} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x_2(0 + 4k_1 + 16k_0) \\ + (-j)^{k_2} x_2(1 + 4k_1 + 16k_0) \\ + (-1)^{k_2} x_2(2 + 4k_1 + 16k_0) \\ + (j)^{k_2} x_2(3 + 4k_1 + 16k_0) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

REORDER

- STAGE 3出力で、 $x3(k_2+4k_1+16k_0)$ が計算されましたが、最初の変数変換で k_0 の係数は1で、 k_2 の係数が16であり、数値のINDEXが変化している。すなわち、計算された数字列の順序は異なっていることになる。
- したがって、以下に示すREORDERが必要となる。

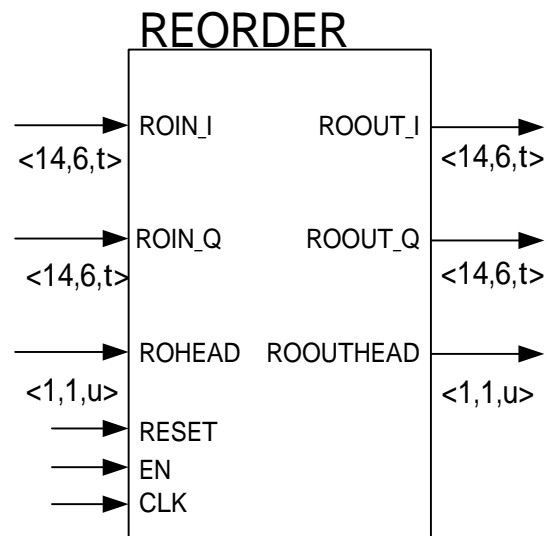
$$X(k_0 + 4k_1 + 16k_2) = x3(k_2 + 4k_1 + 16k_0)$$

REORDER

$x3(k_2+4k_1+16k_0)$	$X(k_0+4k_1+16k_2)$	$x3(k_2+4k_1+16k_0)$	$X(k_0+4k_1+16k_2)$	$x3(k_2+4k_1+16k_0)$	$X(k_0+4k_1+16k_2)$	$x3(k_2+4k_1+16k_0)$	$X(k_0+4k_1+16k_2)$
0	0	16	1	32	2	48	3
1	16	17	17	33	18	49	19
2	32	18	33	34	34	50	35
3	48	19	49	35	50	51	51
4	4	20	5	36	6	52	7
5	20	21	21	37	22	53	23
6	36	22	37	38	38	54	39
7	52	23	53	39	54	55	55
8	8	24	9	40	10	56	11
9	24	25	25	41	26	57	27
10	40	26	41	42	42	58	43
11	56	27	57	43	58	59	59
12	12	28	13	44	14	60	15
13	28	29	29	45	30	61	31
14	44	30	45	46	46	62	47
15	60	31	61	47	62	63	63

宿題6 REORDER回路の設計

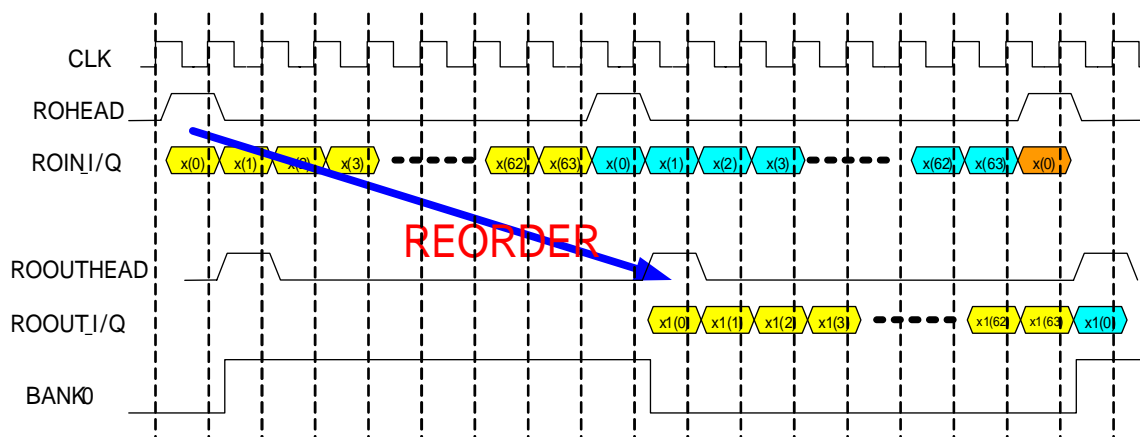
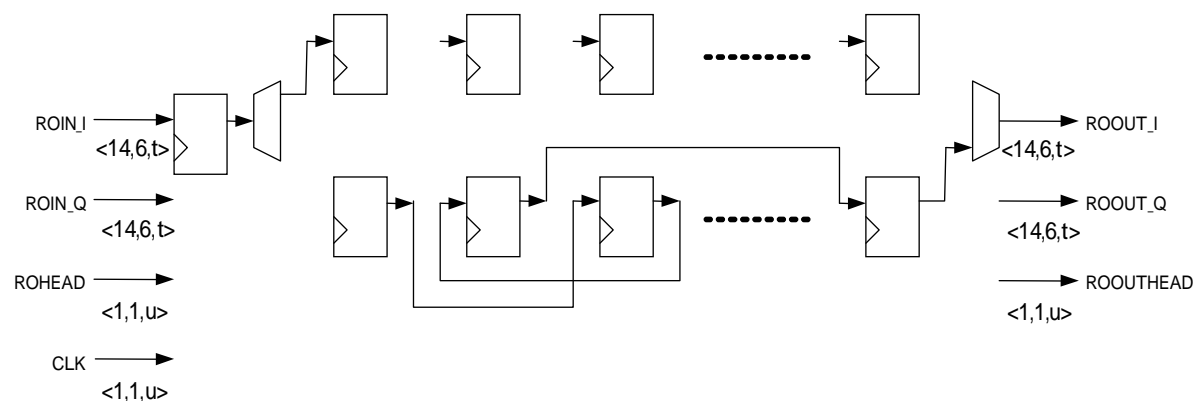
- 与えられたテンプレート、テストベンチを用いて、REORDER回路を設計せよ！
(今回は回路合成のみ)
- テンプレート:
 - <http://www.ie.u-ryukyu.ac.jp/~wada/cad06/reorder/reorder.vhd>
 - http://www.ie.u-ryukyu.ac.jp/~wada/cad06/reorder/test_reorder.vhd



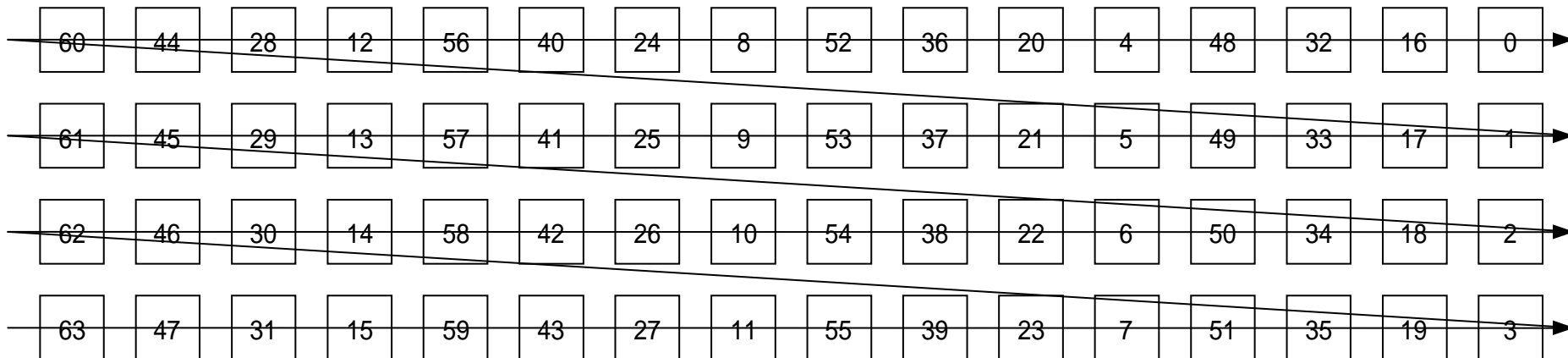
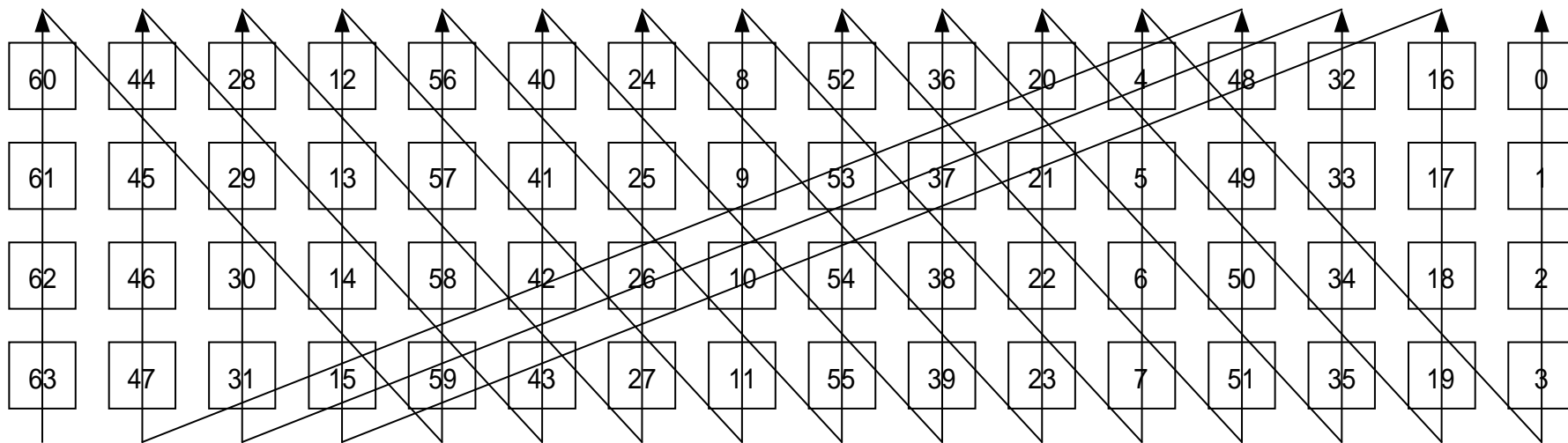
状態のかわるシフトレジスタで実現できる

64ポイント シリアル FFT

ARCHITECTURE REORDER



状態のかわるシフトレジスタで実現できる



REORDER動作波形

