

1. ブール代数

- ブール代数の広い定義: 集合 L が与えられ、その任意の元(要素) A, B に対して、2つの演算 $\cdot, +$ が定義される時、 $A \cdot B, A+B$ は L の元であり、次の公理が成立する。

表4. 2ブール代数の公理

公理1	交換則	$A \cdot B = B \cdot A$ $A+B = B+A$
公理2	結合則	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ $A+(B+C) = (A+B)+C$
公理3	吸収則	$A \cdot (A+B) = A$ $A+(A \cdot B) = A$
公理4	分配則	$A \cdot (B+C) = (A \cdot B)+(A \cdot C)$ $A+(B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$
公理5	相補則	最小限 0 と最大限 1 が存在し、任意の A に対し $A \cdot A' = 0$ $A+A' = 1$ A' (教科書の表記と異なる) は A の補元


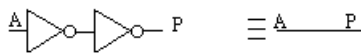
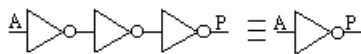
- 具体的には2値('0' と '1')を取る論理関数はブール代数となる。
○集合 L : 元は'0' と '1'
○2つの演算 $\cdot, +$ をそれぞれ、AND と OR に対応させる。
○ A の補元 A' を論理関数の A に対する NOT に対応させる。
- 任意の論理関数 $f(A, B, C, \dots)$ は'0' または '1' の値をとり L に属し、論理関数の集合はブール代数となる。
すなわち、ブール代数の諸性質は、すべて論理関数に適用できる。

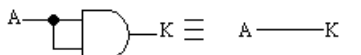
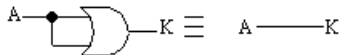
2. ブール代数の公式集

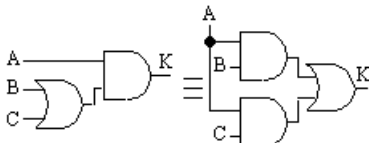
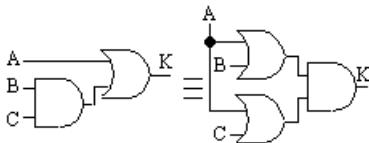
1. 可換則	
$A \cdot B = B \cdot A$ (1-1)	
$A + B = B + A$ (1-2)	

2. 吸収則	
$A + 0 = A$ (1-3)	
$A + 1 = 1$ (1-4)	
$A \cdot 0 = 0$ (1-5)	
$A \cdot 1 = A$ (1-6)	

3. 相補則	
$A + A' = 1$ (1-7)	
$A \cdot A' = 0$ (1-8)	

4. 二重否定則	
$A'' = A$ (1-9)	
NOT ゲート2段で、 信号は遅れるが、 元と同じ信号になる。	 

5. べき等則	
$A \cdot A = A$ (1-10)	
$A + A = A$ (1-11)	

6. 分配則	
$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ (1-12)	
$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ (1-13)	

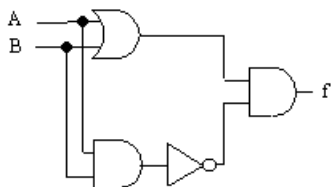
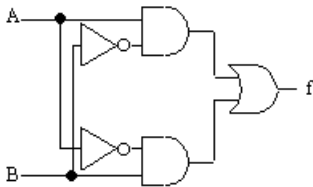
7. 結合則	
$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (1-14)$ $A + (B + C) = (A + B) + C \quad (1-15)$	<p>2段の方が遅延時間小さい</p>

8. 吸収則1	
$A \cdot (A + B) = A \quad (1-16)$ $A + (A \cdot B) = A \quad (1-17)$ $A \cdot (A' + B) = A \cdot B \quad (1-18)$ $A + (A' \cdot B) = A + B \quad (1-19)$	<p>AND-OR/OR-AND で 同じ信号が入ると おかしい!</p>

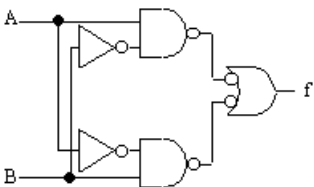
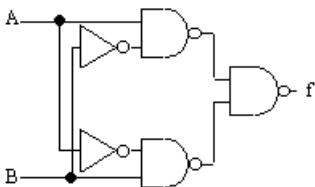
9. ド・モルガンの定理	
$(A + B)' = A' \cdot B' \quad (1-20)$ $(A \cdot B)' = A' + B' \quad (1-21)$	

3. 例題

- ブール代数公理／定理により式を変換することで、異なる回路を作れる。
- このような、ある出力状態が、その時の入力状態の組み合わせによって決定される論理回路を「組み合わせ回路」もしくは「組み合わせ論理回路」という。

<p>$f = (A+B) \cdot (A \cdot B)'$ を実現すると</p>		<p>トランジスタ数 = $6(\text{NOR}) + 6(\text{AND}) + 2(\text{NOT}) + 6(\text{AND})$ $= 20$</p>
<p>式を変形する、</p> $f = (A+B) \cdot (A \cdot B)'$ $= (A+B) \cdot (A' + B')$ $= A \cdot (A' + B') + B \cdot (A' + B')$ $= A \cdot A' + A \cdot B' + B \cdot A' + B \cdot B'$ $= 0 + A \cdot B' + B \cdot A' + 0$ $= A \cdot B' + B \cdot A'$		<p>トランジスタ数 = $6 + 6 + 6 + 2 + 2$ $= 22$</p> <p>トランジスタ数は増えてしまった!</p>

- 回路の変形方法
 AND や OR ではなく、NAND や NOR を使用の方が回路面積は小さい。

<p>上記回路に対して、NOT2つを挿入</p>	<p>ドモルガンの定理適用 (16トランジスタで実現)</p>
	

4. シヤノンの展開定理（加法標準形）

$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = X_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n) + X_i' \cdot f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

したがって、

$$f(A, B) = A \cdot f(1, B) + A' \cdot f(0, B) = A \cdot (B \cdot f(1,1) + B' \cdot f(1,0)) + A' \cdot (B \cdot f(0,1) + B' \cdot f(0,0))$$

$$f(A, B) = A \cdot B \cdot f(1,1) + A \cdot B' \cdot f(1,0) + A' \cdot B \cdot f(0,1) + A' \cdot B' \cdot f(0,0)$$

(加法標準形: 入力信号またはその反転信号を AND し、その AND 出力を OR する形)

に展開することができる。

結果的に $f(A,B)=1$ の項のみ残る。

したがって、以下のような真理値表が与えられたら、

入力 A	入力 B	出力 f(A, B)
0	0	$f(0,0) = 0$
0	1	$f(0,1) = 1$
1	0	$f(1,0) = 1$
1	1	$f(1,1) = 0$

$$f(A,B) = A \cdot B \cdot f(1,1) + A \cdot B' \cdot f(1,0) + A' \cdot B \cdot f(0,1) + A' \cdot B' \cdot f(0,0) = A \cdot B' + B' \cdot A$$

となる。

- ある真理値表が与えられた時、「結果が1となる変数の値0, 1のそれぞれの組み合わせについて、その値が1の時はそのまま、0の時はその変数を NOT し、すべての変数の AND をとった項を OR で結ぶことで、論理関数を求めることができる。」

(乗法標準形)

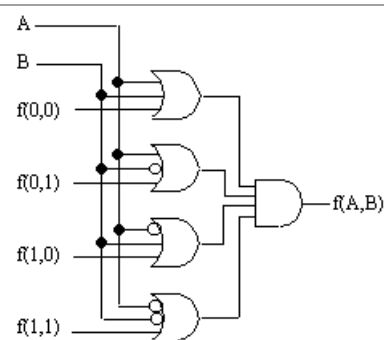
$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = (X_i + f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n)) \cdot (X_i' + f(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n))$$

$$f(A,B) = (A+B+f(0,0)) \cdot (A+B'+f(0,1)) \cdot (A'+B+f(1,0)) \cdot (A'+B'+f(1,1))$$

(乗法標準形: 入力信号またはその反転信号を OR し、その OR 出力を AND する形)

に展開することができる。

結果的に $f(A,B)=0$ の項のみ残る。



- ある真理値表が与えられた時、「結果が0となる変数の値0, 1のそれぞれの組み合わせについて、その値が0の時はそのまま、1の時はその変数を NOT し、すべての変数の OR をとった項を AND で結ぶことで、論理関数を求めることができる。」

宿題3 学籍番号 名前 日付 を書いて 提出すること。

(注意:回路を設計する場合、特に明記しないが、なるべく少ないゲート数で実現せよ。)

- 1) 2入力 NAND ゲートのトランジスタレベルの回路図を書け
- 2) 2入力 AND の真理値表を書け
- 3) 2入力 OR の真理値表を書け
- 4) n入力 NAND、NOR ゲートのトランジスタ数はいくらか?
- 5) n入力 AND、OR ゲートのトランジスタ数はいくらか?
- 6) 式 $f(A, B, C) = A' \cdot B \cdot C + A \cdot B' \cdot C + A \cdot B \cdot C' + A \cdot B \cdot C$
を AND、OR、NOT ゲート用いて回路図を実現せよ。総トランジスタ数はいくつか?
- 7) 上記式を NAND、NOR、NOT を用いて実現せよ。総トランジスタ数はいくつか?
- 8) 上記式を以下のように変形する。最後の式はどうなる?

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= A' \cdot B \cdot C + A \cdot B' \cdot C + A \cdot B \cdot C' + A \cdot B \cdot C \\ &= (A' \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C) + (A \cdot B' \cdot C + A \cdot B \cdot C) + (A \cdot B \cdot C' + A \cdot B \cdot C) \\ &=???????????????????? \end{aligned}$$

- 9) 上記 8) の結果式を、AND、OR、NOT ゲートだけを用いて回路図を実現せよ(AND, OR, NOT の全てを用いる必要はない)。総トランジスタ数はいくつか?
- 10) 上記 8) の結果式を、NAND、NOR、NOT ゲート用いて回路図を実現せよ(NAND, NOR, NOT の全てを用いる必要はない)。総トランジスタ数はいくつか?
- 11) $A \cdot C + B \cdot C' + A \cdot B = A \cdot C + B \cdot C'$ をブール代数の公式を用いて、証明せよ。(左辺を変形してゆき、右辺にする)

12) 以下の真理値表で与えられる論理関数を乗法標準形で表せ。

入力 A	入力 B	出力 f(A, B)
0	0	f(0,0) = 0
0	1	f(0,1) = 1
1	0	f(1,0) = 1
1	1	f(1,1) = 0

13) 上記 12)の乗法標準形を AND、OR、NOT ゲートを用いて回路図を実現せよ (AND, OR, NOT の全てを用いる必要はない)。総トランジスタ数はいくつか？

14) 上記 12)の乗法標準形を NAND、NOR、NOT ゲートを用いて回路図を実現せよ (NAND, NOR, NOT の全てを用いる必要はない)。総トランジスタ数はいくつか？

15) 以下の真理値表で与えられる回路を NAND、NOR、NOT だけを用いて設計せよ (NAND, NOR, NOT の全てを用いる必要はない)。

(ヒント:この回路は加算器で、3つの入力の1の数を数えて、2桁の2進数(上位:C、下位:S)として出力する回路)

それぞれの出力Cと出力Sに関する論理式を加法標準形で求めて、回路図を作成すればよい。

2つの回路で同じ信号を共通に使用してもよい。

入力 A	入力 B	入力 C	出力 C	出力 S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

16) 上記 15)で設計した回路の総トランジスタ数はいくらか？

以上